This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

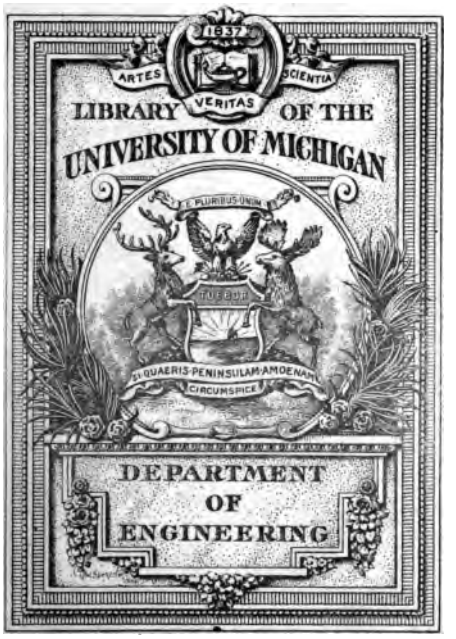
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A 758,043
ENG
TG
265
.B21

MOVING LOADS ON RAILWAY UNDERBRIDGES

H. BAMFORD


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

[redacted]

MOVING LOADS ON RAILWAY UNDERBRIDGES.

WHITTAKER'S PRACTICAL HANDBOOKS FOR ENGINEERS.

ADAMS, H.	PRACTICAL TRIGONOMETRY FOR ENGINEERS, SURVEYORS, &c. 2s. 6d. net.
ALEXANDER, J.	MODEL ENGINE CONSTRUCTION. 6s. net.
ARNOLD, J.O., & IBBOTSON, F.	STEEL WORKS ANALYSIS. 10s. 6d. net.
BJÖRLING, P. R.	PIPES AND TUBES. 3s. 6d. net.
BODMER, G. R.	HYDRAULIC MOTORS AND TURBINES. 15s.
„	INSPECTION OF RAILWAY MATERIAL. 5s.
BURNS & KERR	MODERN PRACTICE OF COAL MINING. Part I. 2s. net.
COOKE, C. J. B.	BRITISH LOCOMOTIVES. 7s. 6d.
ELLIOTT, A. G.	GAS AND PETROLEUM ENGINES. 2s. 6d.
ENGINEER DRAUGHTSMEN'S WORK. 1s. 6d.	
FARROW, F. R.	STRESSES AND STRAINS: their Calculation and that of their Resistances. 5s. net.
FINDLAY, Sir G.	WORKING AND MANAGEMENT OF AN ENGLISH RAILWAY. 7s. 6d.
FODEN, J.	MECHANICAL TABLES. 1s. 6d.
GREENWELL, A., and ELSDEN, J. V.	ROADS, THEIR CONSTRUCTION AND MAINTENANCE. 5s. net.
HAWKINS & WALLIS	THE DYNAMO: Its Theory, Design and Manufacture. 15s.
HERBERT, T. E.	TELEGRAPHY. 6s. 6d. net.
HOBART, H. M.	ELECTRIC MOTORS — INDUCTION MOTORS AND CONTINUOUS CURRENT MOTORS. 12s. 6d. net.
HOBART & STEVENS	STEAM TURBINE ENGINEERING. 21s. net.
HORNER, J. G.	PRINCIPLES OF FITTING. 5s.
KAPP, G.	TRANSFORMERS FOR SINGLE AND MULTIPHASE CURRENTS. 6s.
LODGE, O.	LIGHTNING CONDUCTORS AND LIGHTNING GUARDS. 15s.
MAYCOCK, W. P.	ALTERNATING CURRENT CIRCUIT AND MOTOR. 4s. 6d. net.
„	ELECTRIC LIGHTING AND POWER DISTRIBUTION. Vol. I., 6s.; Vol. II., 7s. 6d.
„	ELECTRIC WIRING TABLES. 3s. 6d.
MAZZOTTO, D.	WIRELESS TELEGRAPHY AND TELEPHONY. 6s. net.
MIDDLETON, J. A. T.	SURVEYING AND SURVEYING INSTRUMENTS. 5s.
MOEDEBECK, H. W. L.	POCKET BOOK OF AERONAUTICS. 10s. 6d. net.
OWEN, W. C.	TELEPHONE LINES. 5s.
PUNGA, F.	SINGLE PHASE COMMUTATOR MOTORS. 4s. 6d. net.
RIDER, J. H.	ELECTRIC TRACTION. 10s. 6d. net.
SALOMONS, Sir D.	MANAGEMENT OF ACCUMULATORS. 6s. net.
SERRAILLIER, L.	RAILWAY TECHNICAL VOCABULARY. French, English, and American. 7s. 6d. net.
SUTCLIFFE, G. W.	STEAM POWER AND MILL WORK. 10s. 6d.
TURNER & HOBART	INSULATION OF ELECTRIC MACHINES. 10s. 6d. net.
TWELVETREES, W. N.	STRUCTURAL IRON AND STEEL. 6s. net.
„	CONCRETE-STEEL. 6s. net.
„	CONCRETE-STEEL BUILDINGS. 10s. net.
WALKER, S. F.	ELECTRICITY IN OUR HOMES & WORKSHOPS. 5s. net.
WALMISLEY, A. T.	LAND SURVEYING AND LEVELLING. 6s. net.
„	FIELD WORK AND INSTRUMENTS. 5s. net.
WHEELER, G.	FRICTION AND ITS REDUCTION. 3s. net.
WHITTAKER'S	ELECTRICAL ENGINEER'S POCKET BOOK. 3s. 6d. net.
„	MECHANICAL ENGINEER'S POCKET BOOK. 3s. 6d. net.
WILLIAMS, H.	MECHANICAL REFRIGERATION. 10s. 6d.

WHITTAKER & CO., 2, WHITE HART STREET, LONDON, E.C.

MOVING LOADS ON RAILW. UNDERBRIDGES

INCLUDING:

DIAGRAMS OF BENDING MOMENTS AND SHEARING FOR

AND

TABLES OF EQUIVALENT UNIFORM LIVE LOADS.

BY

HARRY BAMFORD, M.Sc., A.M.Inst.C.E.,

Lecturer on Engineering Drawing and Design, Glasgow University,

Formerly Associate Professor of Hydraulics, McGill University, Montreal.

WHITTAKER & CO.,

2, White Hart Street, Paternoster Square, London, E.C.;

and 64–66, Fifth Avenue, New York.

1907.

LONDON:
PRINTED BY WILLIAM CLOWES AND SONS, LIMITED,
DUKE STREET, STAMFORD STREET, S.E., AND GREAT WINDMILL STREET, W.

PREFACE.

THE attention of the author having been directed, some five years ago tedious and unscientific methods commonly used in practice in the prep of tables of "equivalent uniform live loads" for railway under-line it occurred to him that much of the labour which the application o methods involved might be saved, and the work simplified, by a direct cation of the funicular polygon. Working on these lines he has succe devising a graphical method, whereby, on a single diagram, the maximun and the maximum bending moments and the points along the spans a they occur can be determined with facility for a wide range of spans any given type-train. A full description of this method originally appe *Engineering* on September 7th, 1906, and was followed in quick suc by three other articles dealing more or less closely with the same These four articles are now brought together in Chapters IV–VII following work, and three other chapters on Diagrams of Bending M and Shearing Forces in Beams added, in the hope that it may prove to engineering students in general and to designers of railway underbri particular.

The author's thanks are due to *Engineering* for permission to reprod articles above referred to and for kindly supplying electros of the diagran

H. BAM

Glasgow, November 1907.

197393

MOVING LOADS ON RAILWAY UNDERBRIDGES

CHAPTER I.

Bending Moments and Shearing Forces in Beams.

The bending moment and shearing force at any cross section, or point more conveniently termed, of a beam, are generally determined on the tion that the external forces acting upon the beam are all in one the plane of bending—and at right angles to the direction of th length. Now, for any such system of co-planer forces, the cond equilibrium are:—

(1) The algebraical sum of the components of the forces taker direction is nil; and

(2) The algebraical sum of the moments of the forces about any their plane is nil. If the forces under consideration, however, b equilibrium, then:

(3) The algebraical sum of the components of the forces taker direction is equal to the component of their resultant taken in direction; and

(4) The algebraical sum of the moments of the forces about a in their plane is equal to the moment of their resultant about point.

Let A B, therefore, Fig. 1, represent a beam of span L supporte ends and loaded with a single load W concentrated at a point E, dista

and let P_A and P_B be the supporting forces at A and B respectively. Then, ɔm the above conditions of equilibrium, we have:

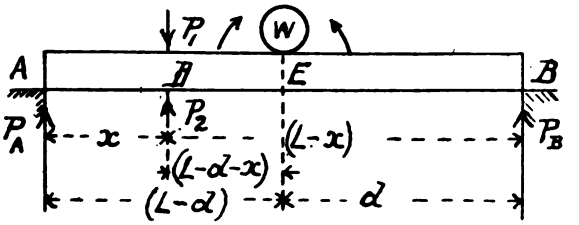
$$P_A + P_B - W = 0; \text{ or } P_A + P_B = W;$$

ıd, taking moments about B and A respectively,

$$P_A.L - W.d = 0; \text{ or } P_A = \frac{W.d}{L},$$

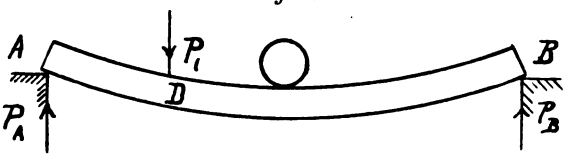
ıd $$W(L - d) - P_B.L = 0; \text{ or } P_B = W - \frac{W.d}{L} = W - P_A.$$

Fig. 1.



Now take any point D between A and E, and consider the equilibrium of ıe portion A D of the beam. If, at D, we imagine two opposite forces, P_1 and ₂, each equal and parallel to P_A, to be applied, these forces, balancing one ıother, will not disturb the equilibrium in any way; P_A and P_1, however, will ɔnstitute a couple of moment $P_A.AD = P_A.x$, tending to rotate A D in a

Fig. 2.



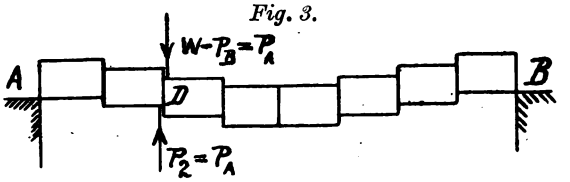
lockwise direction, while the unbalanced force P_2 will tend to translate A D pwards. Considering, in the same way, the equilibrium of the portion B D, ′e see that P_B at B, and W at E, are equivalent to a force $= W - P_B = P_A$ ɔting downwards at D, together with a couple of moment $= P_B.BD - W.ED$ $= P_B(L - x) - W(L - x - d) = -(W - P_B)(L - x) + P_A.L = P_A.x$, ɔnding to rotate B D in a counter-clockwise direction.

The two equal couples acting in opposite directions upon A D a respectively tend to bend the beam at D, and the two equal and opposi tend to shear the beam at the point. The moment of either couple is c bending moment at D, and either force is called the shearing force at th

Again, let the beam be loaded in any manner, and assume R_1 and the total loads upon the portions A D and B D respectively, and a a distances of their centres of gravity from D (Fig. 4). Then, from t condition of equilibrium, it follows that:

Bending moment at D $= P_A.x - R_1.a = P_B (L - x) - R_2.b$,
and shearing force at D $= P_A - R_1 = R_2 - P_B$.

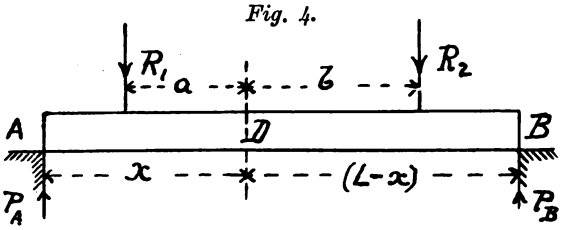
Fig. 3.



Or the bending moment at any point of a beam is the algebraical su moments about the point of all the external forces acting upon the p either side of it, and the shearing force at the point is the algebraical su external forces acting either upon the portion to the left, or upon the p the right of the point.

For convenience we shall regard the bending moment at any poi

Fig. 4.



beam as positive or negative according as the beam, under the actio external forces, tends to bend concavely upwards (as in Fig. 2), or c downwards at the point, and the shearing force at any point as p negative, according as the portion on the left of the point tends to slide or downwards relatively to the portion on the right (Fig. 3).

CHAPTER II.

IAGRAMS OF BENDING MOMENTS AND SHEARING FORCES DUE TO FIXED LOADS.

Case I.—Cantilever fixed at one end and loaded at the other.

Let A B, Fig. 5, represent a cantilever fixed at B and loaded with a single ncentrated load W at A. The bending moment at any point D, distant from A, will be $M_x = -W.x$, and at B it will be $M_L = -W.L$, and the earing force will be constant throughout and $= -W$. The diagram of

Fig. 5.

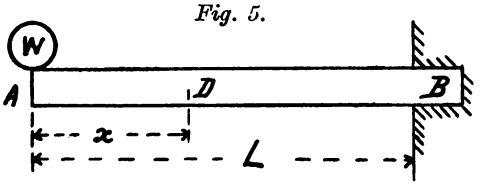


Fig. 6.

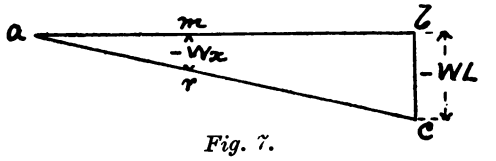
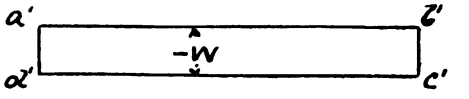


Fig. 7.



nding moments, therefore, will be a triangle, *a b c*, Fig. 6, and the diagram of earing forces a rectangle, as shown in Fig. 7.

Case II.—Cantilever loaded with several concentrated loads.

Let the cantilever represented in Fig. 8 be loaded with the concentrated ıds W_1, W_2 and W_3.

Proceeding as in Case I, the diagram of bending moments acting alone will be the triangle $a\,b\,b_1$, Fig. 9, and similarly th of bending moments due to W_2 and W_3 respectively will be th $c\,b_1b_2$ and $d\,b_2b_3$, where b_1b_2 and b_2b_3 represent $-W_2(a_2+a_3)$ and respectively.

The diagrams of shears due to W_1, W_2 and W_3 respective rectangles, as shown by $a'b'c'd'$, $e'c'f'g'$ and $h'f'i'k'$, Fig. 10.

Fig. 8.

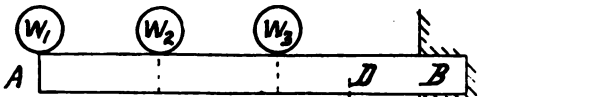


Fig. 9.

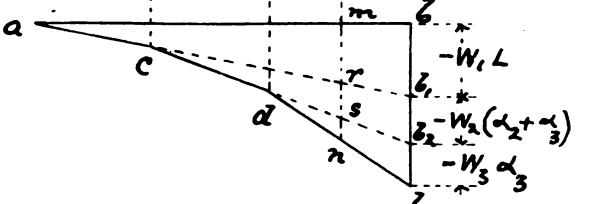
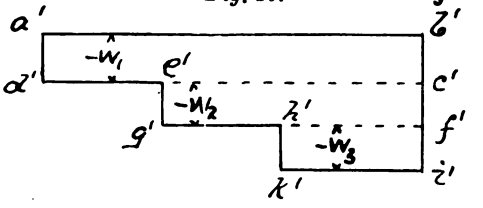


Fig. 10.



Hence, due to W_1, W_2 and W_3 combined, the diagram of bending will be the polygon $a\,b\,b_3d\,c\,a$, Fig. 9, and the diagram of shears the step shown in Fig. 10.

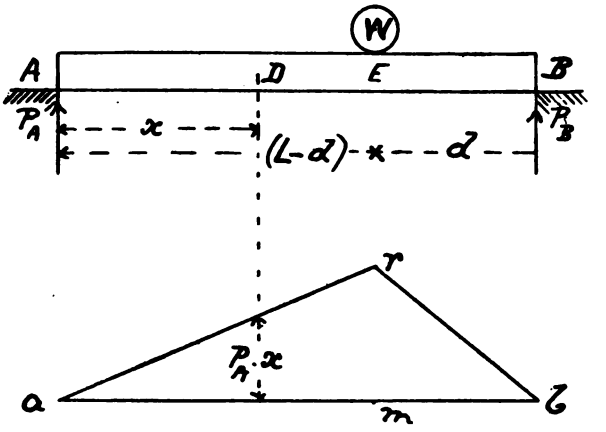
Case III.—Cantilever loaded throughout its length with a distributed load.

Let w be the load per unit of length, and D a point distant Fig. 11; then, since the algebraical sum of the forces acting on the p

angle, $a\,r\,b$, Fig. 18, where $m\,r$ represents $P_A.(L - d) = P_B.d$, the bending ment at E.

Again, the shear for all points between A and E will be $= P_A$, and for all

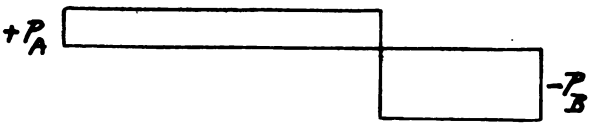
Figs. 17 and 18.



ints between E and B it will be $= P_A - W = -P_B$, and the diagram of ears will consist of two rectangles as shown in Fig. 19.

Case Va.—Let the beam in the last case extend over the supports by amounts presented by A E and B F respectively (Fig. 17*a*), and assume the supporting rces P_A and P_B uniformly distributed over A E and B F. The intensity (or

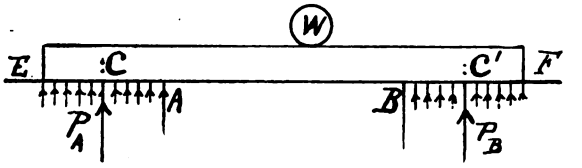
Fig. 19.



ad per unit of length) of these loads will be $w_1 = \frac{P_A}{A\,E}$ and $w_2 = \frac{P_B}{B\,F}$, and the sultants of the loads will pass through the centres, c and c', of A E and B F. ie diagram of bending moments, therefore, will be as shown in Fig. 18*a*, nere $e\,k$ and $f\,m$ are parabolas (the same as in Case II, but inverted), and

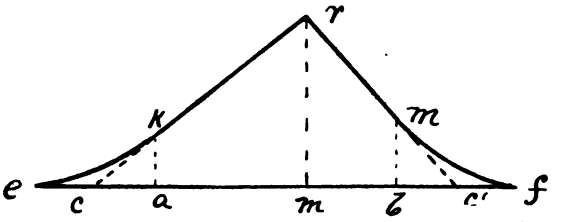
$r\,k$ and $r\,m$ straight lines passing, when produced, through c and c' re
The bending moment represented by $m\,r$, therefore, will be = P

Fig. 17a.



$P_B.c'm$, and the bending moment at any point between the suppo
the same as for a beam having a span equal to $c\,c'$, with the suppo
concentrated at the points c and c'. The distance $c\,c'$, therefore, ma

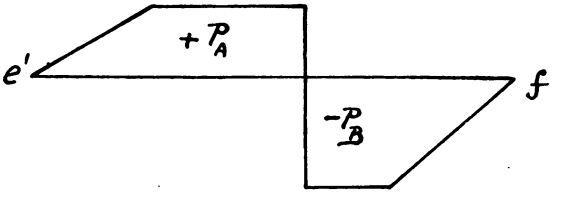
Fig. 18a.



bending moments are concerned, be called the "effective span," ar
clear span.

Again, from the diagram of shearing forces represented in Fig

Fig. 19a.



evident that so far as shearing forces between A and B are con
supporting forces P_A and P_B may be regarded as acting at c and c' r
or the distance $c\,c'$ will be the effective span in this case also.

The span referred to in the following examples is the effective span.

Case VI.—Beam supported at both ends, and loaded with two or more centrated loads. Let the beam A B, Fig. 20, be acted upon by loads W_1, and W_3 at points E, F and G, distant d_1, d_2 and d_3 respectively from B. en :—

$$P_A = \frac{W_1.d_1 + W_2.d_2 + W_3.d_3}{L}, \text{ and}$$

$$P_B = \frac{W_1(L - d_1) + W_2(L - d_2) + W_3(L - d_3)}{L}.$$

w draw, under A B, the horizontal line $a\,b$, Fig. 21, to represent the span, l from b erect the perpendicular $b\,e$ to represent, on any scale, $P_A.L$, and rk the points f and g so that $e\,f$ and $f\,g$ represent, on the same scale, $W_1.d_1$ l $W_2.d_2$ respectively. The lines $a\,e$, $1\,f$ and $2\,g$ will then cut the verticals ough E, F and G respectively in points 1, 2 and 3, such that the polygon 2 3 b will be a diagram of bending moments. For if, through any point D the beam, a vertical line be drawn cutting the lines $a\,e$, $1\,f$, $2\,g$ and $a\,b$, in , n and m respectively,

$$\frac{m\,r}{a\,m} = \frac{b\,e}{L} = P_A, \text{ or } m\,r = P_A.a\,m = P_A.A\,D;$$

l similarly, $r\,s = W_1.E\,D$, $s\,n = W_2.F\,D$, and $m\,n = m\,r - r\,s - s\,n$ $P.A\,D - W_1.E\,D - W_2.F\,D$ = the bending moment at D. The ordinate, ı, therefore, of the polygon a 1 2 3 b, at any point m along the span, represents bending moment at that point; or, in other words, the polygon is a diagram ɔending moments.

The shearing force between A and E is constant and $= P_A$; between E and F s $= P_A - W_1$, between F and G it is $= P_A - W_1 - W_2$, and between G and it is $= P_A - W_1 - W_2 - W_3 = -P_B$. The diagram of shearing forces, refore, will be as shown in Fig. 24.

Another method. A more purely graphical method than the above, and ı which is of somewhat greater importance in consequence of its greater ɔlicability and usefulness, is what may be called "the funicular polygon thod," which may be described as follows.

Along a vertical line of loads a 1–3 b, Fig. 23, lay off the distances

[redacted]

Fig. 20.

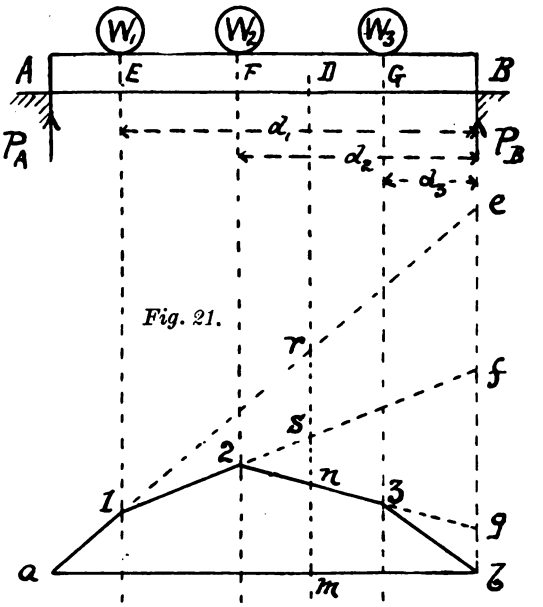


Fig. 21.

Fig. 22.

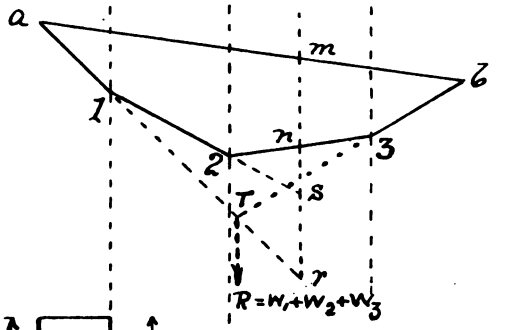


Fig. 23.

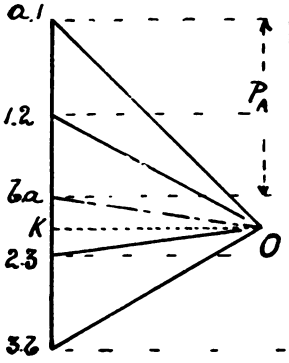
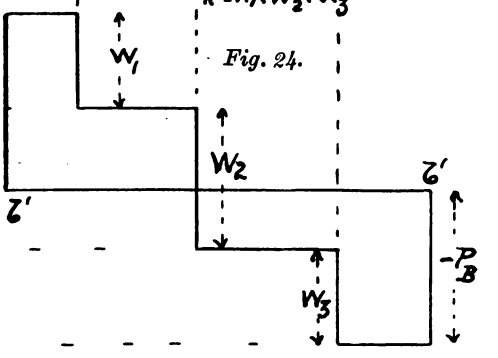


Fig. 24.



–1.2, 1.2–2.3 and 2.3–3 *b*, to represent, on any scale, W_1, W_2 and W_3 pectively; and taking any pole O, draw the radius vectors O–*a*.1, O–1.2, 2.3 and O–3.*b*. Then, starting from any point *a* in the vertical through Fig. 22, draw *a* 1, 1 2, 2 3 and 3 *b* parallel respectively to the above radius tors, to cut the verticals through W_1, W_2, W_3 and B (Fig. 20) in the points , 3 and *b*, and then draw the radius vector O–*b a* parallel to the closing , *b a*, of the funicular polygon *a* 1 2 3 *b*. P_B and P_A will then be represented 3.*b*–*b*.*a* and *b*.*a*–*a*.1 (Fig. 23) respectively, and the polygon *a* 1 2 3 *b a* be a diagram of bending moments.

For suppose *a* 1 2 3 *b* to be a frame of bars supported vertically at *a* and *b* acted upon by the loads W_1, W_2 and W_3 suspended from the joints 1, 2 3 respectively, the triangle of forces for joint 1 would then be *a*.1–1.2–O g. 23), and that for joint *a*, *a*.1–O–*b*, *a*. Hence, if *a*.1–1.2 represent O–*a*.1 would represent the pull in 1 *a* (Fig. 22) and *b*.*a*–*a*.1 the porting force at *a*; and as the supporting forces are obviously the same for h the frame and beam, *b*.*a*–*a*.1 will represent P_A. Similarly, 3 *b*–*b a* will resent P_B.

Now draw through the pole O a horizontal line to cut the line of loads in and through any point D in the beam a vertical line cutting *a* 1, 1 2, 2 3 oduced if necessary) and *a b* in *r*, *s*, *n*, and *m* respectively. Then, since the ngles *r m a*, *r s* 1 and *s n* 2, Fig. 22, are respectively similar to the triangles –*a*.1–O, *a*.1–1.2–O and 1.2–2.3–O, Fig. 23,

$$\frac{rm}{b.a\text{–}a.1} = \frac{rm}{P_A} = \frac{ra}{a.1\text{–}O} = \frac{AD}{OK}, \text{ or } rm = \frac{P_A.AD}{OK}$$

$$\frac{rs}{a.1\text{–}1.2} = \frac{rs}{W_1} = \frac{s1}{1.2\text{–}O} = \frac{ED}{OK}, \text{ or } rs = \frac{W_1.ED}{OK}$$

$$\frac{sn}{1.2\text{–}2.3} = \frac{sn}{W_2} = \frac{n2}{2.3\text{–}O} = \frac{FD}{OK}, \text{ or } sn = \frac{W_2.FD}{OK}$$

Therefore $mn = rm - rs - sn = \dfrac{P_A.AD - W_1.ED - W_2.FD}{OK} = \dfrac{Mx}{OK}$,

. M_x, the bending moment at D, is $= mn \times OK$, where mn is measured on linear scale on which AB represents the span, and OK on the scale oads.

The diagram of shearing forces can be readily constructed by drawi base line $b'b'$ through the point $b\,a$, Fig. 23, and projecting across from the of division in the line of loads as shown in Fig. 24.

Note.—If the first and last sides ($a\,1$ and $b\,3$) of the funicular p $a\,1\,2\,3\,b$ be produced to meet in T, and $a\,T\,b$ be regarded as a frame su at a and b, it will be clear, from the triangle of forces $a.1$–$3\,b$–O, load = $W_1 + W_2 + W_3$ at T would give the same supporting forces at A as before. Hence $W_1 + W_2 + W_3$ at T is equivalent to W_1 at E + W_2 a

Fig. 25.

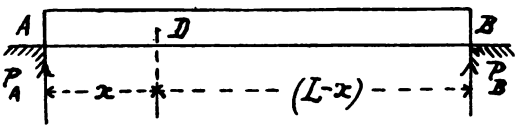


Fig. 26.

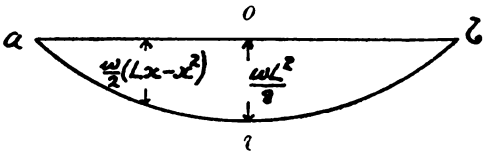
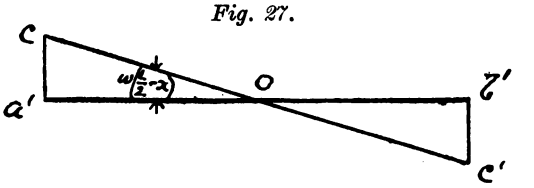


Fig. 27.



W_3 at G; or T is a point in the line of action of the resultant of ' and W_3.

Case VII.—Beam supported at both ends and loaded throughout its with a uniformly-distributed load.

Let w be the load per unit of length and P_A and P_B the supporting Then:—

$$P_A = P_B = \frac{w.L}{2}$$

: bending moment at any point D, distant x from A, is :—

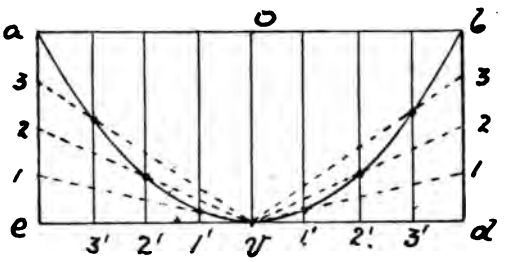
$$M_x = P_A.x - w.\frac{x^2}{2} = \frac{w}{2}(Lx - x^2) \quad . \quad . \quad (1)$$

l the shear at D is :—

$$S_x = P_A - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

The bending moment, M_x, varies with the ordinates to a parabola, *a v b*, g. 26, of which (1) is the equation. At the centre the bending moment is a ıximum, is $= \frac{w}{2}\left(L.\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{wL^2}{8}$, and is represented by the ordinate *v o* Fig. 26. The shear, S_x, varies with the ordinates to a straight line C O C',

Fig. 28.



g. 27, from $+\frac{wL}{2}$ at A to $-\frac{wL}{2}$ at B, and is nil at the centre.

The parabola *a v b*, Fig. 26, may be constructed as follows. Having set off ' at right angles to *a b* to represent, on any scale, $\frac{wL^2}{8}$, complete the ɛtangle, *a b d e*, Fig. 28, and divide *v d*, *v e*, *d b* and *e a* into the same (any) ımber of equal parts. Now draw through the points of division 1', 2', 3' . . . *v d* and *v e* lines parallel to *v o* and join *v* to the points of division 1, 2, 3 . . . *e a* and *d b*. Then the intersections of *v* 1, *v* 2, *v* 3 . . . with the lines drawn rough 1', 2', 3' . . . respectively, will give points on the parabola required.

Case VIII.—Beam supported at the ends and loaded with a uniformly-ɜtributed load over a portion of its length only.

Let L be the length of the span; l the length of E F, the portion with a uniformly-distributed load of w per unit of length, and d, the dist F from B. Then:—

$$P_A = \frac{w\,l\left(\frac{l}{2} + d\right)}{L}$$

and

$$P_B = \frac{w\,l\left(L - d - \frac{l}{2}\right)}{L}.$$

For any point between A and E, distant x from A, $M_x = P_A\,x$ whicl with x according to the ordinates to a straight line, $a\,e$, where $e\,e'$ re] $P_A.A\,E$.

For any point, D, between E and F,

$$M_x = P_A.A\,D - W.D\,E.\frac{D\,E}{2} \text{ and at F, } M_x = P_A.A\,F - \frac{W.(E\,I}{2}$$

For points between F and B,

$$M_x = P_B\,(L - x).$$

To construct the bending moment diagram, therefore, lay off $b\,b'$, Fi represent $P_A.L$, and let $a\,b'$ cut the vertical drawn through E in e; $e\,e'$ w represent $P_A.A\,E$, the bending moment at E. Now let the vertical dra any point D, in E F, cut $a\,b$ in m and $a\,b'$ in q; then $q\,m$ will represent] and if we lay off along $q\,m$, a length $q\,p$ to represent $\frac{W.(D\,E)^2}{2}$, $m\,p$ will r $P_A.A\,D - W.\frac{(D\,E)^2}{2}$, the bending moment at D. Other points may be on the parabolic curve, $e\,p\,f$, in the same way, and the diagram compl drawing the straight line $f\,b$.

Another method. Consider E F as if it were a uniformly-loade supported at E and F and draw the parabolic curve $e'\,s\,f'$ for the load. The bending moment at any point D of this beam $M_D = w\frac{E\,F}{2}.E\,D - \frac{w\,(E\,D)^2}{2}$, and will be represented by the ordinate m join e with f, Fig. 30, and let $e\,f$ cut $q\,m$ in n; then, from similar triang

$$\frac{q\,n}{r\,f} = \frac{e\,n}{e\,f} = \frac{E\,D}{E\,F}, \text{ or } q\,n = r\,f.\frac{E\,D}{E\,F}.$$

since rf and qp represent $\frac{w(\mathrm{EF})^2}{2}$ and $\frac{w.(\mathrm{ED})^2}{2}$ respectively,

$qn - qp$) represents $\frac{w.(\mathrm{EF})^2}{2}\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EF}} - \frac{w.(\mathrm{ED})^2}{2} = \mathrm{M_D}$, or $pn = ms$.

Fig. 29.

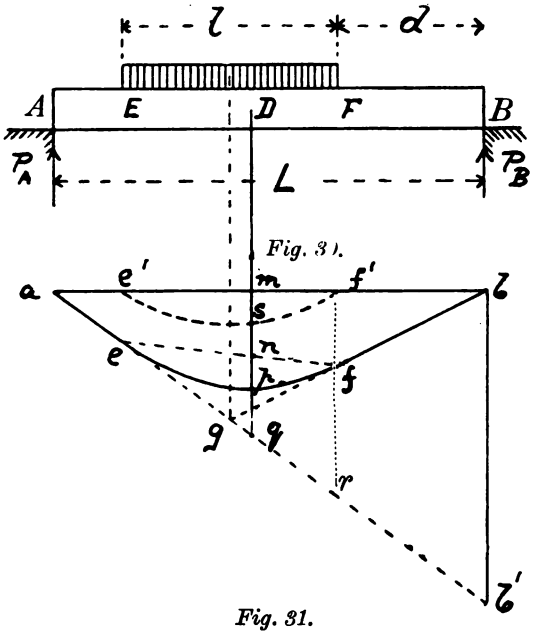
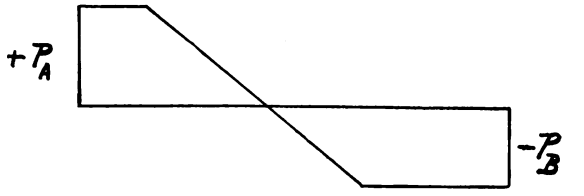


Fig. 30.

Fig. 31.



ce, erecting the ordinates $e'e$ and $f'f$ to represent $\mathrm{P_A}.\mathrm{AE}$ and $\mathrm{P_B}.\mathrm{BF}$ ding moments at E and F respectively), and drawing the straight lines ae, fb, and then erecting ordinates from ef equal to the corresponding s of the parabola $e'sf'$, the diagram of bending moments $aepfb$ will ned.

The diagram of shears will be as shown in Fig. 31.

3. Relation between the bending moment and shearing force at any p a loaded beam.

(*a*) Concentrated loads.

Let the beam be supported at the ends and loaded as represented in F then:

between A and E the shearing force $S_1 = P_A$;
„ E „ F „ $S_2 = P_A - W_1$;
„ F „ G „ $S_3 = P_A - W_1 - W_2$;
„ G „ B „ $S_4 = P_A - W_1 - W_2 - W_3 = - P_B$

and at E the bending moment $M_E = P_A . AE = S_1 . AE$;
„ F „ $M_F = P_A . AF - W_1 . EF$;
$= P_A . AE + (P_A - W_1) EF = M_E +$
„ G „ $M_G = P_A . AG - W_1 EG - W_2 . FG$;
$= P_A . AF - W_1 . EF + (P_A - W_1 - W$
$= M_F + S_3 . FG$.

Hence $\frac{M_E}{AE} = S_1$, $\frac{M_F - M_E}{EF} = S_2$ and $\frac{M_G - M_F}{FG} = S_3$; and, in general, i the shearing force in the segment between any two consecutive loads, δ length of the segment, and δM the increment of the bending moment, $S = \frac{\delta M}{\delta L}$, or the shear at any point of the beam is equal to the rate of in of the bending moment at the point.

(*b*) Continuous loads.

Let the intensity of the load vary from point to point with the ordin a continuous curve (or straight line), as represented in Fig. 32, and consid two points a and b at an infinitely small distance dx apart. Let M_a and the bending moment and shear respectively at a, and M_b and S_b those and let w be the intensity of the load—load per unit of length—ov then:

$$S_b = S_a - w . dx, \text{ or } \frac{S_b - S_a}{dx} = \frac{dS}{dx} = - w \quad . \quad . \quad .$$

ıd, since the forces acting upon the portion of the beam to the left of a are ıuivalent to a couple M_a and a force S_a, acting upwards at a,

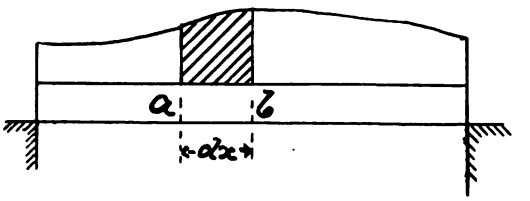
$$M_b = M_a + S_a\,dx - w.dx.\frac{dx}{2};$$

$$= M_a + S_a.dx - \text{an infinitely small quantity of the second order which may be neglected;}$$

$$\frac{M_b - M_a}{dx} = S_a = \frac{dM}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ence, from (1), the intensity of the load at any point of the beam is equal to ıe rate of *decrease* of the shear at the point; and, from (2), the shear at any ɔint is equal to the rate of *increase* of the bending moment at the point.

Fig. 32.



Again, from (1), we see that if for any portion $a\,b$ of the beam $w = 0$, then $S = 0$, or the shear S is constant for that portion; and, from (2), if the shear S any point is nil, then $\frac{dM}{dx} = 0$, or the bending moment at the point is either maximum or a minimum.

Further, if $w = f(x)$ be the equation to the curve of loads, then $= -\int f(x)\,dx$ will be the equation to the curve of shears, and $M = \int S.dx$ e equation to the curve of bending moments.

Example.—Let the equation to the curve of loads be $w = a\,x$, where a is a nstant; then: the intensity of the load at B will be a L, the diagram of loads a ıangle, A B B′, Fig. 33, the total load W upon the beam $\frac{a\,L}{2}.L$, and the stance of the centre of gravity of the load from B will be $\frac{L}{3}$.

Therefore $$P_A = \frac{\frac{aL}{2}.L.\frac{L}{3}}{L} = \frac{aL^2}{6} = \frac{W}{3}. \quad P_B = \frac{2}{3}W,$$

Fig. 33.

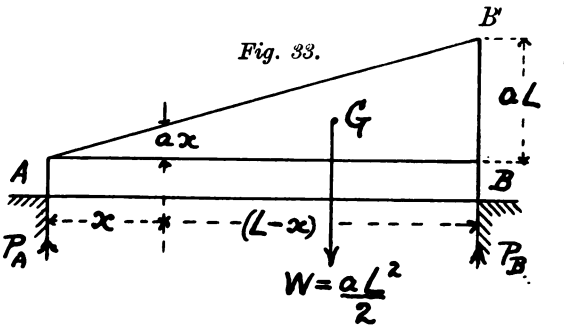


Fig. 34.

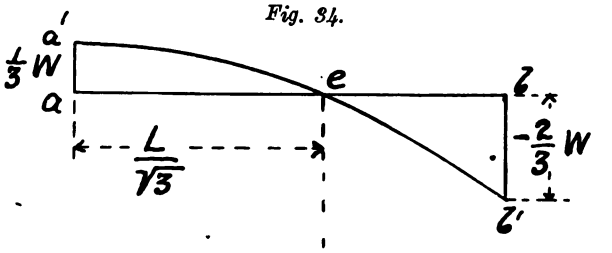
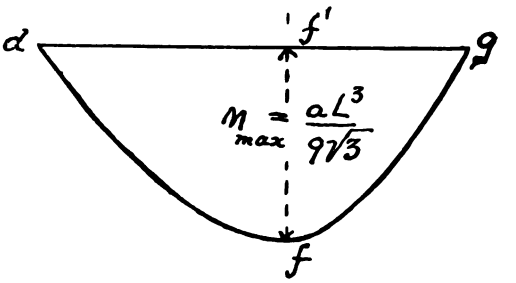


Fig. 35.



and $S = -\int f(x)\,dx = -\int ax.dx = -\frac{ax^2}{2} + c$, where c, the co
integration, is $= P_A' = \frac{aL^2}{6}$, since $S = P_A$ when $x = 0$.

C

$= a\left(\frac{L^2}{6} - \frac{x^2}{2}\right)$, a parabola $a'e\,b'$, Fig. 34, of which $S = 0$ when $x = \frac{L}{\sqrt{3}} = a\,e$.

Again $M = \int S.dx = \int a\left(\frac{L^2}{6} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{a\,(L^2x - x^3)}{6} + 0$ (the constant of integration being nil, since $M = 0$ when $x = 0$).

Hence, $M = \frac{a}{6}(L^2x - x^3)$ is the equation to the curve dfg of bending moments (Fig. 35), and M is a maximum when $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$, or $M_{max} = \frac{a}{6}\left(L^2.\frac{L}{\sqrt{3}} - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{a\,L^3}{9\sqrt{3}}$.

CHAPTER III.

Diagrams of Bending Moments and Shearing Forces due to Moving Loads.

Continuous Loads.

Case I.—Beam supported at both ends acted upon by a uniform movin of length greater than the span.

Let w be the load per unit of length, and D a point in the beam x from A, Fig. 36. Assuming the load moving across the span from ri left, when the front, E, of the load is to the right of D, the bending mom this point will be $M_x = P_A.x$, which is obviously greater when D B is loaded than when only partially loaded. Now suppose the load to exte to or beyond D; then, the bending moment at D will be $M_x = P_B.(L - \frac{w(L-x)^2}{2}$, and as this is a maximum for any given value of x when I maximum, it follows that the bending moment at any point D is a max when A B is fully loaded. The diagram of maximum bending mo therefore, is a parabola $a\,v\,b$, Fig. 37, the equation to which is:—

$$M_x = \frac{w}{2}(Lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

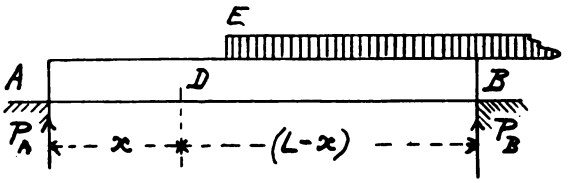
or the same as for Case VII, Chap. II.

Maximum Shear.—When the load extends over a portion, B E, only beam, the shearing force at any point D, between A and E, will be positiv equal to P_A; and will obviously be greater, therefore, when D B is fully l than when only partially loaded.

Now suppose the load to advance a little towards the left, so that the

E, comes to some point, E', between D and A, and let w' be the load upon the portion D E'. As the front of the load advances from D to E' the supporting force P_A will be increased by a fractional part only of the load w', but the shear, being equal to the new supporting force at A minus the whole of w', will be decreased. The positive shear, therefore, at any point D of the beam will be a

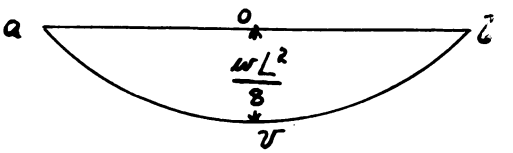
Fig. 36.



maximum when the front of the load has advanced up to the point from the right abutment B.

In the same way it is easily shown that if the load advances from A towards B the shear at any point D between B and the front of the load will be negative, and (numerically) a maximum for that point when the front of the load has advanced just up to the point.

Fig. 37.



Hence, the maximum positive shear at any point D, distant x from A, is:

$$S_x = P_A = \frac{w.(L - x)^2}{2L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

and the maximum negative shear is:

$$S_x' = - P_B = - \frac{w x^2}{2L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

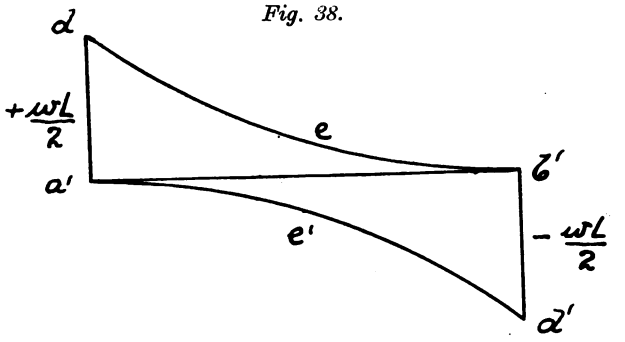
The curves of maximum positive and maximum negative shears are the parabolas $d e b'$ and $a' e' d'$, Fig. 38, of which (2) and (3) respectively are the

equations, and from this figure it is seen that, so far as magnitude concerned, the shear at any point will be a maximum when the load ex to the point from the farther support.

Case II.—Beam supported at the ends and acted upon by a u distributed dead load together with the uniform moving load of the abo

Let w_1 be the moving load, and w_2 the dead load per unit of lengt

Fig. 38.



due to the dead load alone, the bending moment at any point D, dista A, will be (see Case VII, Chap. II):

$$\mathrm{M}_x = \frac{w_2}{2}(\mathrm{L}x - x^2),$$

and the shear will be

$$\mathrm{S}_x = w_2\left(\frac{\mathrm{L}}{2} - x\right).$$

Hence, substituting w_1 for w in equations (1), (2) and (3) of the las the combined dead and live (or moving) loads we shall have:

maximum bending moment $\mathrm{M}_x = \dfrac{w_1 + w_2}{2}(\mathrm{L}x - x^2)$ . . .

„ positive shear $\mathrm{S}_x = \dfrac{w_1(\mathrm{L} - x)^2}{2\,\mathrm{L}} + w_2\left(\dfrac{\mathrm{L}}{2} - x\right)$.

and „ negative shear $\mathrm{S}_x' = -\dfrac{w_1 x^2}{2\,\mathrm{L}} + w_2\left(\dfrac{\mathrm{L}}{2} - x\right)$ . .

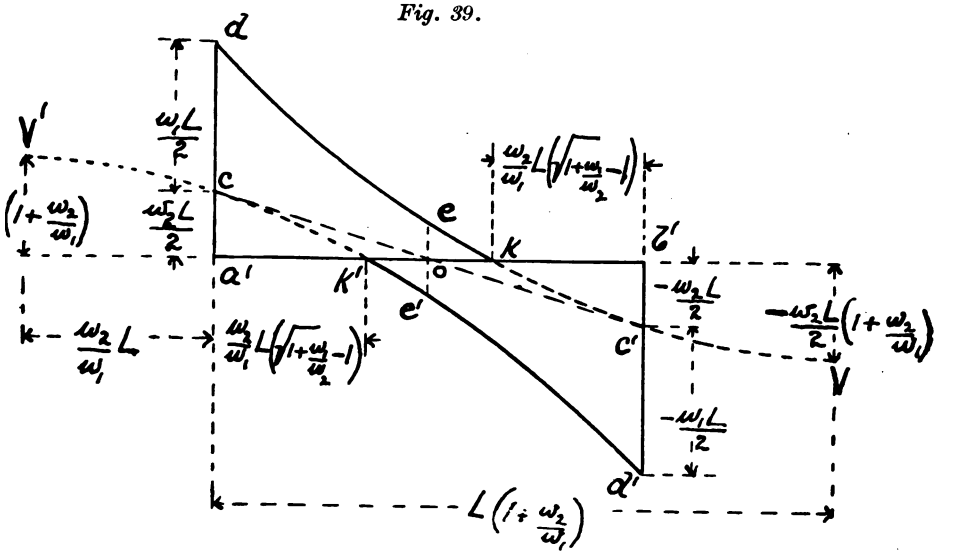
The diagram of maximum bending moments, therefore, is a parabol to $a\,v\,b$, Fig. 37, of which (4) is the equation, and of which $v\,o$, the or

centre, represents $\frac{(w_1 + w_2)\ L^2}{8}$. The diagrams of positive and negative ars are the parabolas d K V and d'K'V', of which (5) and (6) respectively are equations.

To find the point K' put $S_x' = 0$ when

$$x^2 + 2L\frac{w_2}{w_1}x = \frac{w_2}{w_1}L^2 \quad \text{or} \quad x = \frac{w_2}{w_1}L\left(\sqrt{1 + \frac{w_1}{w_2}} - 1\right) = a'K'$$

Fig. 39.



nilarly, putting $S_x = 0$ in (5), we get:—

$$x = a'K = L - \frac{w_2}{w_1}L\left(\sqrt{1 + \frac{w_1}{w_2}} - 1\right), \text{ or } Kb' = \frac{w_2}{w_1}L\left(\sqrt{1 + \frac{w_1}{w_2}} - 1\right).$$

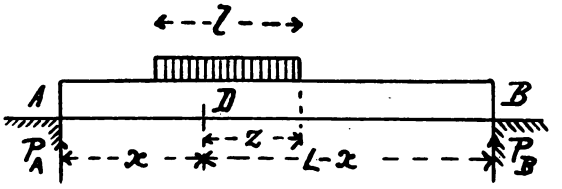
To find V', differentiate equation (6) at equate to zero, when we get $\frac{w_1 x}{L} - w_2 = 0$, or $x = -\frac{w_2}{w_1}L$; and putting this value of x in (6) we get

$$S' = -\frac{w_1}{2L}\cdot\left(\frac{w_2}{w_1}L\right)^2 + w_2\left(\frac{L}{2} + \frac{w_2}{w_1}L\right) = +w_2\cdot\frac{L}{2}\left(1 + \frac{w_2}{w_1}\right).$$

In the same way, or from symmetry, we obtain, for the co-ordinates of V, $= L\left(1 + \frac{w_2}{w_1}\right)$ and $S = -w_2\frac{L}{2}\left(1 + \frac{w_2}{w_1}\right)$. From Fig. 39 it is clear that

between a' and K' the shear is always positive, between K and b' it i negative, and between K' and K it is sometimes positive and s negative. Hence K' and K are the limiting points between which bracing may be required in the case of braced girders.

Fig. 40.



Case III.—Beam supported at both ends and acted upon by a moving load of length less than the span.

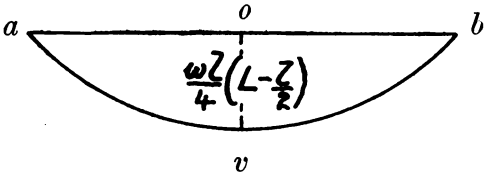
Let l be the length of the moving load, w the load per unit of leng distance from A of any point D of the beam, and z the distance of t extremity of the load from D, Fig. 40.

Then :—

$$P_A = \frac{w.l}{L}\left(L - x - z + \frac{l}{2}\right) \text{ and the bending moment at D is}$$

$$M_x = \frac{w.l}{L}\left(L - x - z + \frac{l}{2}\right)x - w.\frac{(l-z)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Fig. 41.



For a maximum at D, z must have such a value that $\frac{dM}{dz} = 0$;

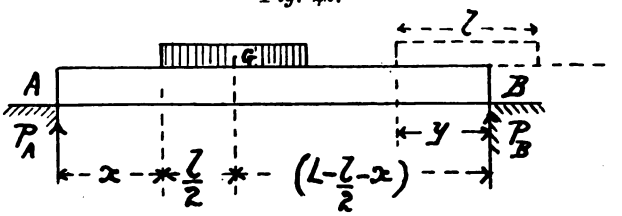
$$\text{or} \qquad -\frac{wlx}{L} + w(l-z) = 0$$

$$\text{or} \qquad z = l - \frac{lx}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

That is, for a maximum bending moment at any point D, $\frac{z}{l} = \frac{L-x}{L}$

nt D divides the length, l, of the load into two portions which bear the same io to one another as the corresponding portions, D B and D A, into which it ides the span.

Fig. 42.

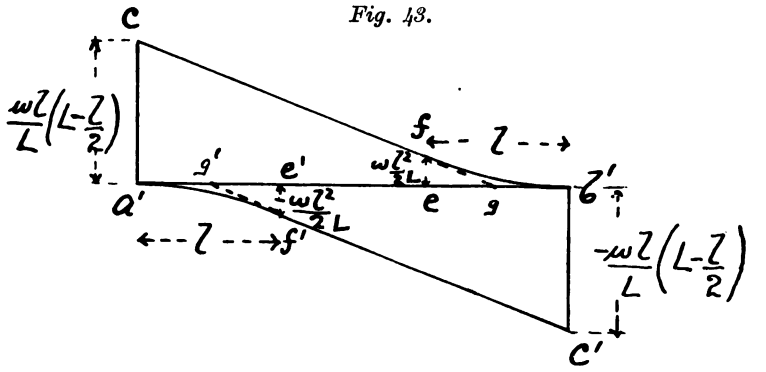


Substituting $l - \frac{l.x}{L}$ for z in (1) we get for the maximum bending moment D,

$$M_{max} = \frac{w.l}{L}\left\{L - x - \frac{l}{2} + \frac{l.x}{L}\right\}x - \frac{w}{2}\cdot\frac{l^2x^2}{L^2}$$

$$= \frac{w.l.x}{L}(L - x)\left(1 - \frac{l}{2L}\right)$$

Fig. 43.



e equation to a parabola, $a\,v\,b$, Fig. 41, of which the ordinate $v\,o$ at the centre presents $w\,l\left(\frac{L}{4} - \frac{l}{8}\right)$, the maximum bending moment at the centre.

Maximum Shearing Force.—Assuming the load moving across the span from ght to left, the maximum positive shear at D will occur when the front of the ad is at the point, and the maximum negative shear when the rear of load is D.

While a portion of length y of the load (Fig. 42) only is on the l maximum shear under the front of the load will be $S = \frac{w y^2}{2 L}$, or, fo between b' and e, where $b'e = l$, the maximum positive shear will be the ordinate at the point to the parabola $b'f$, but when the load comes v the beam the maximum positive shear at any point between e and A, from A, will be:

$$S_x = P_A = w l . \frac{\left(L - x - \frac{l}{2}\right)}{L},$$

which is the equation to the straight line cfg, Fig. 43. The diagram o shears is, therefore, $a'cfb'$, and if we now assume the load to move a span from left to right, we shall obtain a similar diagram $a'f'c'b'$ for the n negative shears.

Concentrated Loads.

Case IV.—Beam supported at both ends acted upon by a single rolling across.

Let W be at any point D, distant x from A, Fig. 44, then:—

$$P_A = W . \frac{L - x}{L} \quad P_B = W . \frac{x}{L}$$

and the binding moment at D will be:

$$M_x = P_A . x = P_B . (L - x).$$

If D now move towards B, P_A will decrease and the bending mome will decrease at the same time; and, similarly, the bending moment a decrease if w move towards A. Hence, the maximum bending momen point, D, of the beam will occur when the load is at the point, and its v be:

$$M_{max} = P_A . x = W . \frac{(L - x)}{L} . x \quad . \quad . \quad . \quad .$$

The diagram of maximum bending moments, therefore, is a parab Fig. 45, where $v o$, the ordinate at the centre, represents $\frac{W . L}{4}$.

Again, as the load W moves up from B to D, the shear $S_x (= P_A)$ i

ease from zero to $+ W.\frac{(L - x)}{L}$; on passing the point, however, and coning to advance towards A, the shear will become negative and equal to $- W = - P_B$, which diminishes, numerically, as W approaches A.

The positive shear, therefore, will be a maximum for any point when the

Fig. 44.

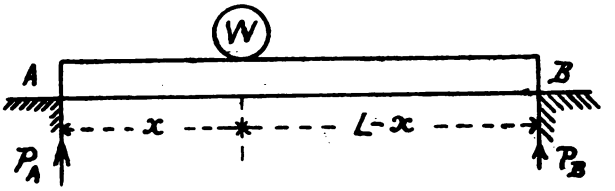


Fig. 45.

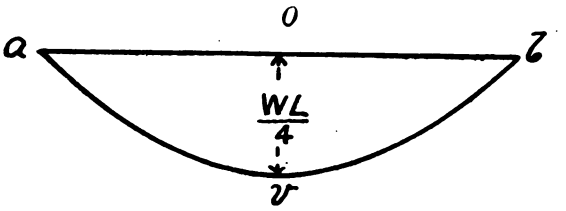
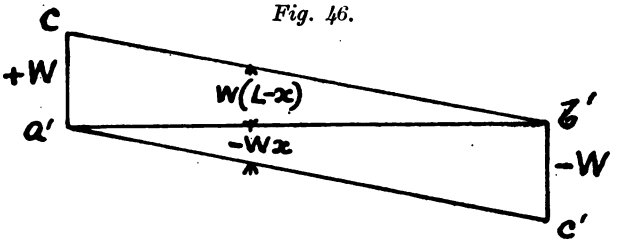


Fig. 46.



is just to the right of the point; and the negative shear will be a maximum n the load is just to the left of the point, their values for a point distant x ı A being, respectively,

$$S_x = W.\frac{L - x}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$S_x' = -\frac{W x}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

The diagram of positive shears, therefore, will be a triangle $a' c b'$, and that of the negative shears a triangle $a' b' c'$.

Case V.—Beam supported at both ends and acted upon by two movir W_1 and W_2, at a fixed distance apart.

Reasoning in the same way as before, it is easily shown that the m bending moment at any point will occur when either one or other of the over the point; and the bending moment due to both W_1 and W_2 at under either load may be obtained by adding the bending moments at tl due to W_1 and W_2 found separately.

Let d be the fixed distance between W_1 and W_2, and suppose the move across the span from right to left. Then, due to W_1 alone, the moment at a point distant x from A, when W_1 is over the point, will be by equation (1) of last case, and, therefore, will vary with x according ordinates of the parabola

$$_1M_x' = W_1 (L - x).\frac{x}{L} \quad (4), \text{ or } a\, v_1\, b, \text{ Fig. 48.}$$

Now, W_2 will not come on the beam until W_1 has moved through a $b c = d$ from B, but as W_1 moves further to the left and comes to a point x from A, the bending moment at the point due to W_2 alone will be :—

$$_1M_x'' = W_2 (L - x - d) \frac{x}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

the equation to the parabola $a\, v_2\, c$, Fig. 48.

Hence, for values of x between o and $L - d$, the bending moment un due to W_1 and W_2 together, will be :—

$$_1M_x = {}_1M_x' + {}_1M_x'' = (W_1 + W_2)(L - x)\frac{x}{L} - W_2.d.\frac{x}{L} \quad . \quad .$$

the equation to a parabola $a\, V_1\, n$ which cuts the parabola $a\, v_1\, b$ at some p

The diagram of bending moments for *points under* W_1, therefore, $a\, V_1\, K\, b$, Fig 48.

In the same way, assuming the loads moving across the span from

; and x the variable distance of W_2 from A, we obtain, for *points under* W_2, parabolas $a' v_2' b'$, $c' v_1' b'$ and $n' K' V_2 b'$, the equations to which are

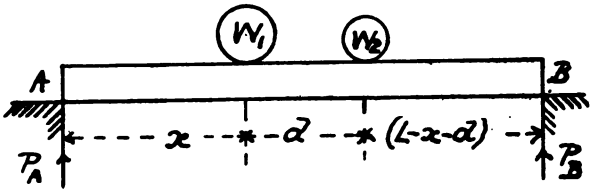
$$_2M_x' = W_2 . \frac{L - x}{L} . x. \quad (7) \quad \text{(due to } W_2 \text{ alone).}$$

$$_2M_x'' = W_1 \frac{(L - x + d)}{L} x - W_1 d. \quad (8) \quad \text{(due to } W_1 \text{ alone).}$$

$$_2M_x = {}_2M_x' + {}_2M_x'' = (W_1 + W_2)(L - x)\frac{x}{L} - W_1 \frac{L - x}{L} . d. \quad (9)$$

to W_1 and W_2 combined).

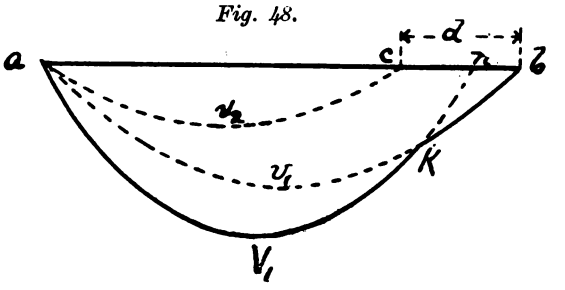
Fig. 47.



And the diagram of bending-moments will be $a' K' V_2 b'$.

Combining the diagram, $a V_1 K b$ (Fig. 48), of maximum bending moments points under W_1, with the diagram, $a' K' V_2 b'$ (Fig. 49), of maximum

Fig. 48.

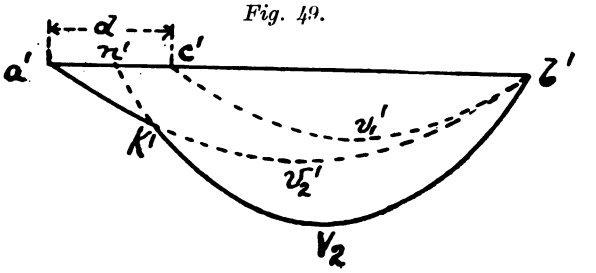


ling moments for points under W_2, we obtain the diagram, $A' V_1 r' u B'$, 50; the ordinate to which, at any point, will give the actual maximum ling moment at the point.

From this diagram (Fig. 50) it is seen that for any point between A′ and r maximum bending moment will occur when W_1 is over the point, and for point between r and B′ the maximum bending moment will occur when W_2 ver the point.

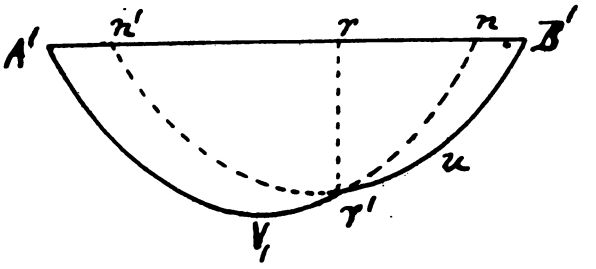
Again, from equations (6) and (9) it follows that, for any point x from A, W_1 at the point will give a greater or less bending moment th W_2 according as ${}_1M_x - {}_2M_x = W_1 . \frac{L - x}{L} . d - \frac{W_2 . d . x}{L}$ is positive or ne that is, according as x is less or greater than $\frac{W_1}{W_1 + W_2} . L \; (= A'r)$.

Fig. 49.



This equation, however, will only give the limiting value of x, for wh gives a greater bending moment than W_2, so long as the distance, d, betw loads is not greater than half the length of the span when the loads ar

Fig. 50.



or greater than some less distance, d', depending upon the ratio $W_1 : W_2$ w loads are unequal. For if d be greater than $\frac{L}{2}$ (or d') the diagram of ma bending moments will assume the form shown in Fig. 53, where u_2, and gives the limiting value of x required.

Point of Greatest Bending Moment.

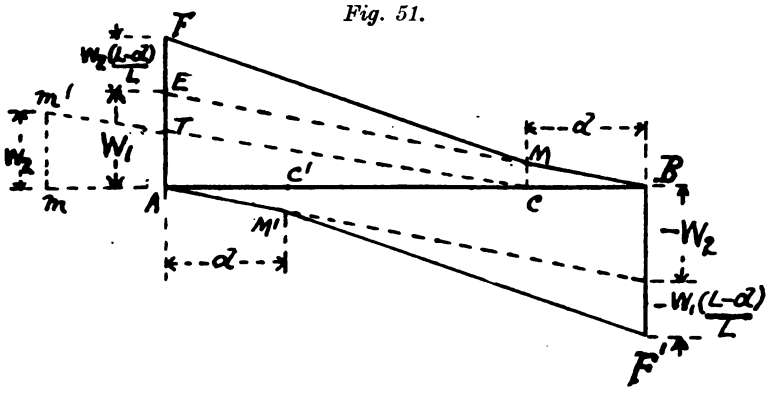
From equation (6), by differentiation, we get:

$\frac{dM_x}{dx} = \frac{W_1 + W_2}{L}(L - 2x) - W_2 \cdot \frac{d}{L}$, which vanishes when

$L - 2x = \frac{W_2}{W_1 + W_2} \cdot d$, or $\frac{L}{2} - x = \frac{W_2}{W_1 + W_2} \cdot \frac{d}{2} = AO - AE = EO$, Fig. 52,

where E is the point of greatest maximum bending moment under W_1. Now, if G be the centre of gravity of W_1 and W_2, $GE = \frac{W_2}{W_1 + W_2} \cdot d = 2 \times EO$.

Fig. 51.



The greatest maximum bending under W_1, therefore, will occur when W_1 and G, the centre of gravity of W_1 and W_2, are equidistant from, and on opposite sides of, the centre of the span. Similarly, by differentiating equation (9) and equating to zero, we shall find that the greatest bending moment under W_2 occurs when that load and G are equidistant from O.

Another Proof.—Equation (6) to the parabola $A' V_1 n$, Fig. 50, can be written in the form $-{}_1M_x = \frac{W_1 + W_2}{L}\left\{x^2 - \left(L - \frac{W_2 \cdot d}{W_1 + W_2}\right)x\right\}$,

$$\frac{W_1 + W_2}{L}\left(x - \left(\frac{L}{2} - \frac{W_2}{W_1 + W_2} \cdot \frac{d}{2}\right)\right)^2 = \frac{W_1 + W_2}{L}\left(\frac{L}{2} - \frac{W_2}{W_1 + W_2} \cdot \frac{d}{2}\right)^2 - {}_1M_x,$$

which is the equation to a parabola having its vertex at a point V_1 distant

$\frac{L}{2} - \frac{W_2}{W_1+W_2}\cdot\frac{d}{2}$ (11) from A, and at a distance $= \frac{W_1+W_2}{L}\left(\frac{L}{2} - \frac{V}{W_1}\right.$ below A′ B′. (12) gives the greatest bending moment under W_1, ar the point along the span at which it occurs—the same as before equation (9) can be written in the form:

$$\frac{W_1 + W_2}{L}(x - a)^2 = \frac{W_1 + W_2}{L}.a^2 - ({}_2M_x + W_1 d)$$

Fig. 52.

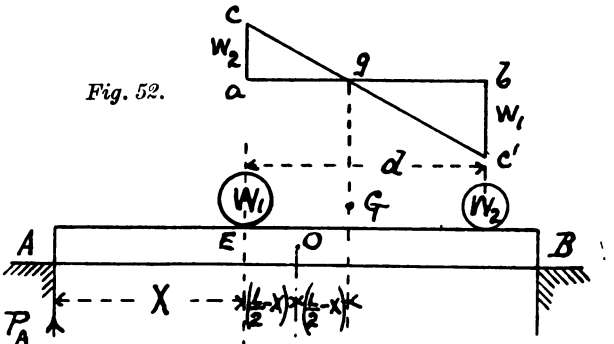
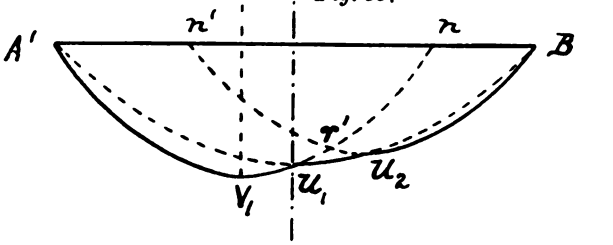


Fig. 53.



$\left(\text{where } a = \frac{L}{2} + \frac{W_1}{W_1 + W_2}\cdot\frac{d}{2}\right)$, giving for the vertex V_2 of the pai Fig. 49, the co-ordinates a and $\frac{W_1 + W_2}{L}.a^2 - W_1.d$, and thus sho greatest bending under W_2 occurs when W_2 is at a distance to t equal to $\left(\frac{g\,b}{2}, \text{Fig. 52}\right)$ half the distance of G from W_2, and that the bending moment is $= \frac{W_1 + W_2}{L}\,a^2 - W_1 d.$

Diagram of Maximum Shears (Fig. 51).—The maximum positive shear at ıy point D, distant x from A, will occur when W_1 is just to the right of the ɔint, and the maximum negative shear will occur when W_2 is just to the left the point.

At a point under W_1, distant x from A, the shear due to W_1 alone will be

$$_1S_x = W_1 \frac{L - x}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Fig. 54.

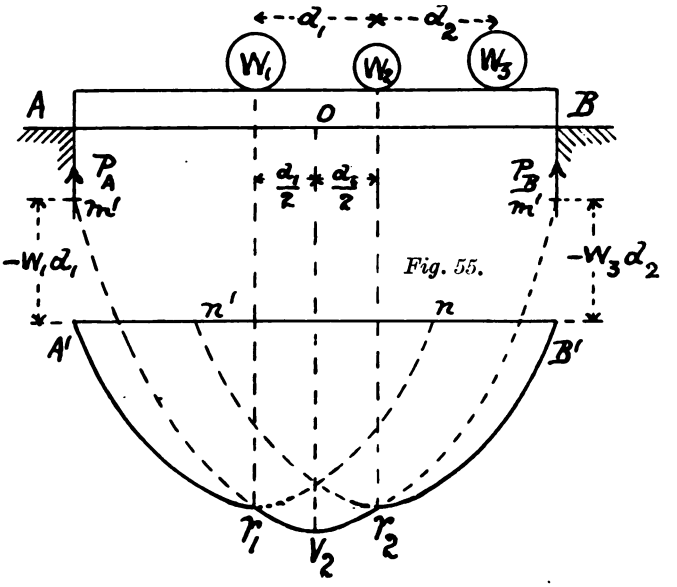


Fig. 55.

ıd that, at the same point, due to W_2 alone, will be

$$_1S_x = W_2 \frac{(L - x - d)}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ovided x be not greater than $Ac = L - d$ (Fig. 51), for until W_1, moving wards the left, has come to c, where $Bc = d$, W_2 has not come on the span, ıd will, therefore, not produce any shear in the beam.

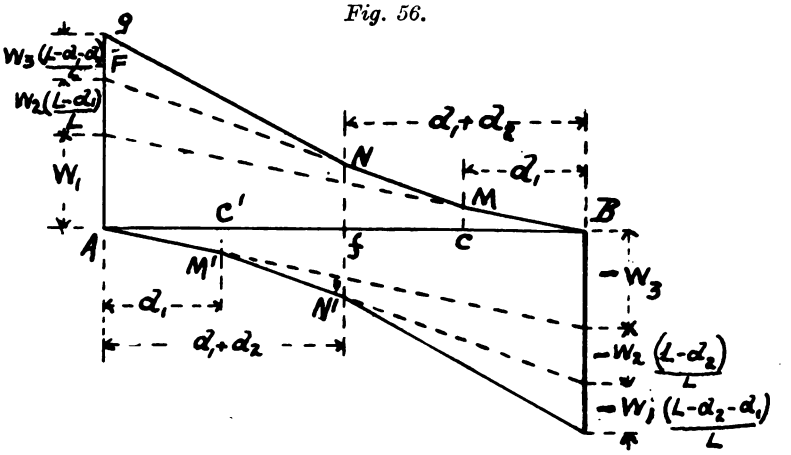
Now (13) is the equation of the straight BE where AE represents W_1, and

(14) that of the straight line C T, where $A T = W_2 . \frac{L - d}{L}$; therefore, if make E F = A T and join F to the intersection M of the vertical through C w B E, we obtain the diagram A F M B of maximum positive shears. The diagr A M′F′B of maximum negative shears may be obtained in the same way.

Case V.—Beam supported at both ends and acted upon by three mov loads at fixed distances apart.

The methods adopted in the last case for two moving loads can be exten to three or more loads. For example, if we have three loads, W_1, W_2 and W_3

Fig. 56.



distances of d_1 and d_2 apart (Fig. 54), the maximum bending moment for poi under W_1 will be given by the equation:

$$_1M_x = \{W_1.(L - x) + W_2(L - x - d_1) + W_3(L - x - d_1 - d_2)\}\frac{x}{L} (= P_A$$

$$= (W_1 + W_2 + W_3)(L - x).\frac{x}{L} - [(W_2 + W_3)\,d_1 + W_3 d_2]\frac{x}{L} \quad . \quad . \quad (1$$

for points under W_2 it will be:

$$_2M_x = \{W_1(L - x + d_1) + W_2(L - x) + W_3(L - x - d_2)\}\frac{x}{L} - W_1.d_1 \quad (2$$

and for points under W_3 it will be:

$$_3M_x = \{W_1(L - x + d_1 + d_2) + W_2(L - x + d_1) + W_3(L - x)\}\frac{x}{L}$$

$$- W_1(d_1 + d_2) - W_2.d_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

[illegible]

[illegible] are the ordinates of the parabolas $A_1 A_2 B$ and $A_1 A_2 B'$ respectively. In fig. 11 the figure $C_1 = C_2$ and $W_1 = W_2$.

Now equation 2 may be written in the form

$$-M = \frac{V - W_1 - V}{-} \cdot x_1^2 - \frac{W_1 C_1 - V_1 (C_1 - C_2)}{W_1 - W_1 - W_2} \cdot x_1$$

$$\frac{V - V_1 - V}{-} \cdot x_1^2 = \frac{W - W_1 - W_2}{-} x_1^2 - M_1 \quad . \quad 4.$$

here $$x_1 = \frac{-}{-} - \frac{W_1 C_1 - W_1 \cdot C_1 - C_2}{-\ W - W_1 - W_2} = \frac{-}{-} - \frac{-}{-} + W_1$$

here V is the distance of the centre of gravity of W_1, W_2 and W_3 from W_1.

Now x is the ordinate of a parabola $A_1 A_2 B$ in which the x-ordinates of the axis V are

$$x = x \text{ and } y \text{ or } M_1 = \frac{W - W_1 - W}{-} \cdot x_1^2$$

and the vertex V_1 of the parabola $A_1 A_2 B$ is the point under W_1 where the bending moment is greatest, and the centre of gravity of the two loads are distant from the centre V of the span, and the maximum bending moment

$$M_{max} = \frac{W - W_1 - W}{-} \cdot x_1^2$$

In the same way equations 3 and 4 may be written in the form

$$\frac{W - W_1 - V_1}{-} - x_1^2 = \frac{W_1 - W_1 - W}{-} \cdot x_1^2 - M - W_1 C_1 \quad . \quad (5)$$

$$\frac{W - W_1 - W}{-} - x_1^2 = \frac{W_1 - W_1 - W}{-} \cdot x_1^2 - M$$
$$- W_1 C_1 - C_2 - W_1 C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Now x_1, y and y show that the three parabolas $A_1 A_2 B$, $A_1 m V_1 m$ and $A_1 B'$, fig. 11, are portions of the same curve but with different positions of the axes. In fact they are portions of the parabolic curve of bending moments due to a single rolling load equal to the sum of the several loads W_1, W_2 and W_3. They also show that the maximum bending moment under any load will be when that load and the centre of gravity of the whole of the loads are distant from the centre of the span.

The above results are true for any number of moving loads so lo loads are on the span when the position of their centre of gravity is ta therefore, the curve of maximum bending moments will consist of a n arcs of the same parabolic curve, the axis being always vertical, but t occupying different positions for the different arcs. A diagram of moments for four loads is shown in Fig. 73, p. 65.

Diagram of Maximum Shears, Fig. 56.—Proceeding as in the (Fig. 51), if we set off F g representing $W_3 \frac{(L - d_1 - d_2)}{L}$ and join g to of intersection, N, of F M with a vertical, f N, drawn at a distance $= d_1 +$ B, A g N M B will be the diagram of positive shears, and the diagram of shears can be similarly completed, as shown in Fig. 56.

Case VI.—Beam supported at both ends and acted upon by any n moving loads at fixed distances apart.

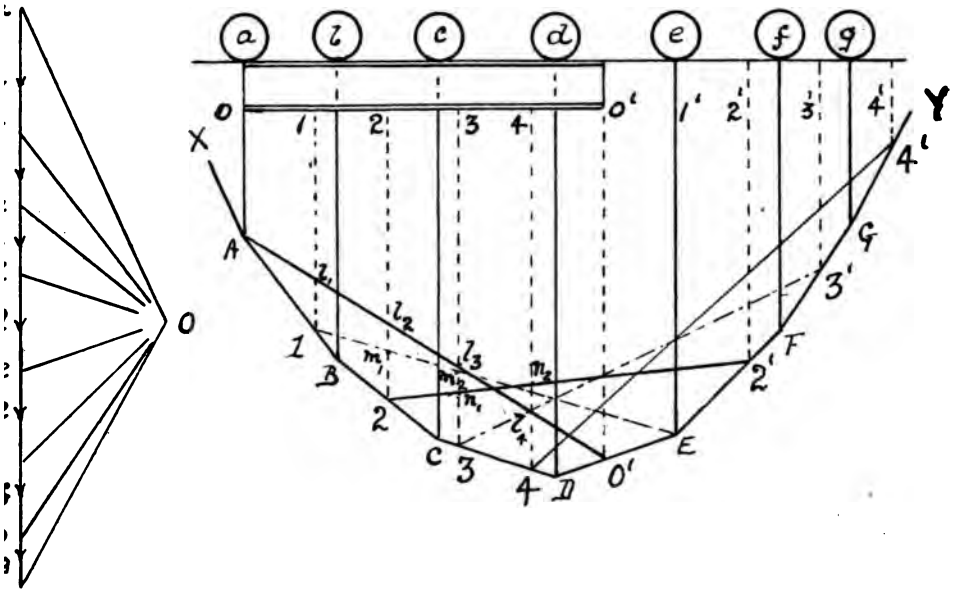
The methods adopted in the last case for obtaining the diagrams of n bending moments and maximum shearing forces for three loads can be to any number of loads, but the greater the number of loads the great complication. Diagrams approximating closely enough for all purposes to the true forms can be readily obtained, however, as show following paragraph.

Diagram of Maximum Bending Moments.—Let the loads be $a, b, c, d,$ g, and let their relative positions be as shown in Fig. 57. Along a line lay off the distances $x\,a$–$a\,b$, $a\,b$–$b\,c$, $c\,d$–$d\,e$ . . . . . $f\,g$–$g\,y$, re ing the loads $a, b, c, \ldots . g$ respectively; then, taking any pole O, and from any point x, draw X A, parallel to O–$x\,a$, to cut the vertical load a in A; from A draw A B parallel to the radius vector O–$a\,b$ to vertical drawn through load b in B and so on; thus obtaining the polygon X A B C . . . G Y.

Now let the beam, in the first instance, be placed with its left termin load a, as shown in Fig. 57; then, as was explained in reference to A B C D O′ will be a diagram of bending moments; and if the beam b into five equal parts (in practice the number should be at least through the points of division 1, 2, 3 and 4, vertical lines be drawn, t

epts $1l_1$, $2l_2$, $3l_3$ and $4l_4$ will give the bending moments at distances of one-fth, two-fifths, three-fifths and four-fifths of the span respectively from the left erminal. Now, instead of moving the loads across the span from right to left, magine the beam to move, under the loads, from left to right; then, when the eam has moved through a distance of one-fifth of the span—the left terminal oming to the point of division marked 1 and the right terminal to 1′—the ew diagram of bending moments will be 1 B C D E, and the new bending

Fig. 57.

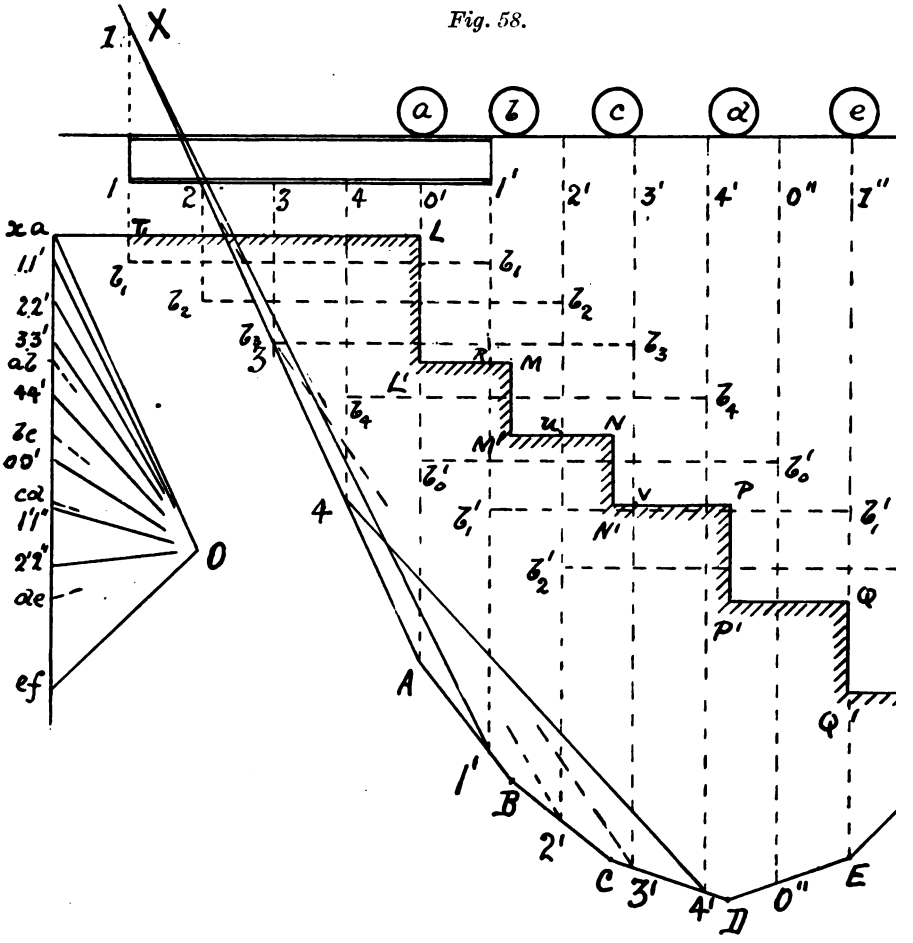


noments at the distances of one-fifth, two-fifths....of the span will be given by he intercepts $2m_1$, $3m_2$... Giving the beam further successive shifts to the ight through distances of one-fifth span, we obtain, in succession, the bending noment diagrams, 2 C D E 2′, 3 D E F 3′, 4 D E F G 4′.....

The diagram of maximum bending moments, Fig. 59, can now be plotted s follows: Let oo', divided into five equal parts, represent the span; then, rom the points of division, erect ordinates 11′, 22′, 33′ and 44′, represent-

ing, respectively, the greatest of the bending moments obtained at the dista from the left terminal of the beam of one-fifth, two-fifths, three-fifths four-fifths span; that is, make 1 1′ equal to the greatest of the dista

Fig. 58.



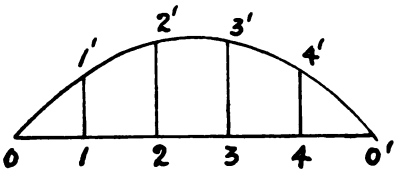
$1l_1$, $2m_1$, $3n_1$...(Fig. 57); 2 2′ equal to the greatest of the distances $2l_2$, $4n_2$...(obtained either by scaling off or with a pair of dividers) and s A fair curve drawn through the points 0 1′ 2′ 3′ 4′ 0′, Fig. 59, will

proximate more or less closely to the true form of the actual diagram of e maximum bending moments.

Diagram of Maximum Shearing Forces.—Draw the vector or force polygon id the funicular polygon as before, extending the line A X, however, as shown Fig. 58, and adding the load-steps $T_1 L L' M M' N$ .... as explained with ference to Fig. 24. When the right terminal of the beam is just to the right load a the negative shear will be equal to $L L'$ or a, but the positive shear nd supporting force at left terminal) will be nil. Now suppose the girder to lvance towards the right through a distance of one-fifth span, it will then occupy e position shown in the figure, and 1 A 1′ will be the corresponding diagram of nding moments.

Now draw from the pole O a line parallel to the closing line 1′1 to cut the

Fig. 59.

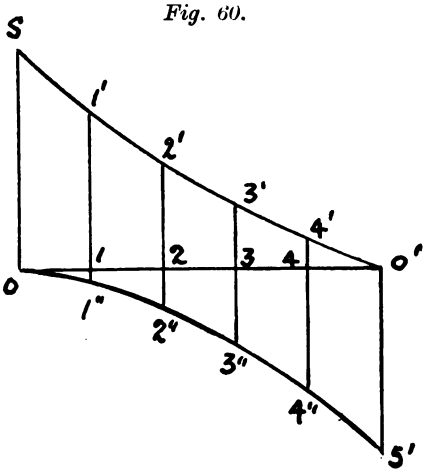


ne of loads in 1 1′ and through this latter point a horizontal line $b_1 b_1$ under the rder; $b_1 b_1$ will then be the base line and $b_1 T_1 L L' R b_1$ the diagram of shearing rces for the girder in the position shown, as was explained with reference to igs. 22, 23 and 24. Advancing the girder in this way through successive tervals of one-fifth (or one-tenth) span, we obtain, in succession, the diagrams bending moments 2 A B 2′, 3 A B C 3′ ...., and drawing from pole O lines arallel to the closing lines 2′2, 3′3, etc., to cut the line of loads in the points 2′, 3 3′, etc., and through these points horizontal lines under the girder, we btain the respective base lines $b_2 b_2$, $b_3 b_3$, etc. The vertical (dotted) lines drawn intervals of one-fifth span will divide each base line into five equal parts, and ie ordinate to the stepped figure at each point of division will give the shearing rce corresponding to that point, the shearing force being positive or negative cording as the ordinate is measured upwards or downwards from the point.

To plot the diagram of maximum shearing forces (Fig. 60) take a pair of

dividers and obtain, first, the greatest of the ordinates measured the stepped figure for the right extremities b_1, b_2, b_3, etc., of the lay it off along O'S'. Then do the same for points at one-fifth right extremities of the base lines, and lay it off along 4 4'', an obtain for points at one-fifth span from the right extremities of th greatest of the (positive) ordinates measured upwards and lay i Repeating this operation (which is much more rapidly done tha

Fig. 60.



from this description) the diagram shown in Fig. 60 can be approximates more or less closely to the true form of the diagra positive and maximum negative shears. A method of determin maximum bending moment and the point along the span at whi be explained in the next chapter, together with a method of c greatest maximum shearing force.

CHAPTER IV.

Graphical Determination of the Maximum Bending Moment and Maximum Shear due to a Train-Load.

a preliminary to the design of railway underbridges it is now customary to ɔpare tables of "equivalent uniform live loads" for spans varying from 5 feet 200 feet. The train-load usually taken for any particular railway and span a basis of calculations is the locomotive, or, for larger spans, the combination locomotives in use on the line, which, coupled together in the form of a ɪtinuous train, gives either:

1. The maximum bending moment, or
2. The maximum shear.

If M be the maximum bending moment, and S the maximum shear produced the axle-loads as the "type-train" crosses the bridge, and if l be the effective ɪn, then, for each track, the "equivalent uniform load derived from the ɪximum bending moment" will be: $W_1 = \frac{M}{\frac{l}{8}}$, and that "derived from the ɪximum shear" will be: $W_2 = 2S$. In the tables of equivalent uniform live ɪds, however, these values are usually increased by $2\frac{1}{2}$ per cent. to provide for ssible future increase of the axle-loads of the type-trains.

Effective Span.—To determine the effective span, let the clear span (Fig. 61), $2c$, the total length of each of the girders $2(c + a)$, and the uniform load r unit length w. The bending moment diagram will then consist of the three rabolas, de, efg, and gh (Fig. 62), and if the parabola efg be continued, it ll cut the base-line dh in k and l, where the distance kl represents, so far as e bending stresses are concerned, the effective span of the girders. The

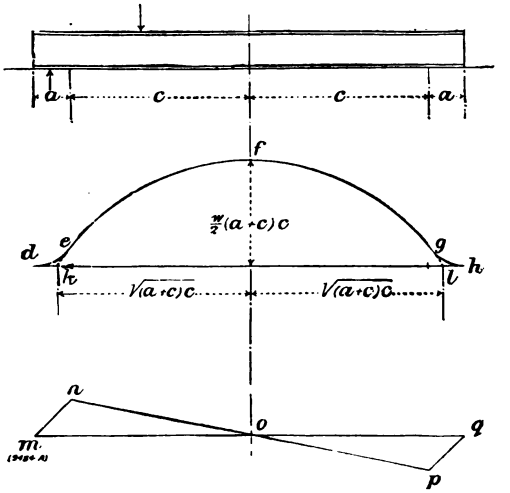
effective span $k\,l$ may also be determined as follows:—Each of th reactions will be $= w\,(c + a)$, and will act at a distance $= c +$ centre of the span; also, the load on each half of the girder will be = and the distance of its centre of gravity from the centre of sp $= \frac{1}{2}\,(c + a)$. Hence the bending moment at the centre will be

$$= w\,(c + a)\left(c + \frac{a}{2}\right) - w\,(c + a)\,\frac{(c + a)}{2} = w\,(c + a)\,\frac{c}{2} = w$$

where $2\,c'$ is the effective span $k\,l$.

Therefore the effective span $= k\,l = 2\,\sqrt{(c + a)\,c}$.

Figs. 61, 62 and 63.



So far as the shearing stresses are concerned, it is clear from t force diagram, Fig. 63, that the effective span is the same as the clea

Maximum Bending Moment.—For a given type-train and a gird given span, the greatest bending moment occurs—at a point near t when the train extends over the whole length of the bridge, a the same time the heaviest wheels of an engine are near th the span.

In most cases we are thus enabled to see at a glance what wheel-loads on the dge will give the greatest bending moment; while in the others it is only essary to test two, or, at most, three, sets of wheel-loads to obtain the one uired. For example, if we take a piece of paper, or a scale, on the edge of ich a distance of 50 feet is marked, and move it under the wheel diagram in . 65 we see at once that the axle-loads which will be on a bridge of this span en maximum bending occurs are those marked *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* and *g*. If, vever, we proceed in the same way for a span of 100 feet, it will appear ubtful as to whether the axle-loads marked *f''* to *a'*, or those marked *f''* to *b'*, e the greatest bending moment. In this case, therefore, both these load tems will require to be tried, when it will be found that the first is the one ich gives the greatest bending moment.

Point of Greatest Bending Moment.—When a series of wheel-loads move r a beam, the bending moment at any point along the span will viously be a maximum when the point is under one or other of the loads e position of any load D, for which the bending moment under it will be aximum, may be readily determined as follows.

In Fig. 64 let R be the total load upon the beam and R′ the load upon the tion A D, and let the distances of their centres of gravity from D be *a* and *a′* pectively. Then the bending moment under D will be

$$M = P_A(x + a) - R' a'$$

$$= R\frac{2c - x}{2c}(x + a) - R'a'$$

erefore $$\frac{dM}{dx} = \frac{R}{2c}(2c - 2x - a)$$

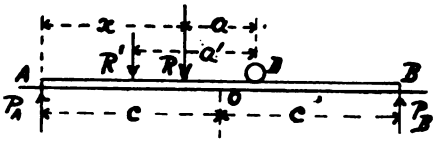
ich vanishes when $2c = 2x + a$, or $c - x = x + a - c = \frac{a}{2}$. That is, "the ximum bending moment under any load D occurs when that load and the ntre of gravity of the whole series on the span are equidistant from the centre the span."

By the application of this rule the maximum moment under any wheel can ily be determined, but in the present case it is only the greatest of these

maxima that is required. Now, as the greatest bending moment produ train-load as it moves over a bridge occurs at or near the centre of t and when the heaviest wheels of an engine are in the neighbourhood point, it is only necessary to determine the points at which the m moments occur for two, or, at most, three of those wheels in order to ob point required. Further, if of two wheels A and B the maximum for nearer the centre than does that for B, A will generally be the one whi the greater maximum bending moment.

Description of the Diagram.—The method found most convenient writer for determining on one diagram the greatest bending moments an

Fig. 64.



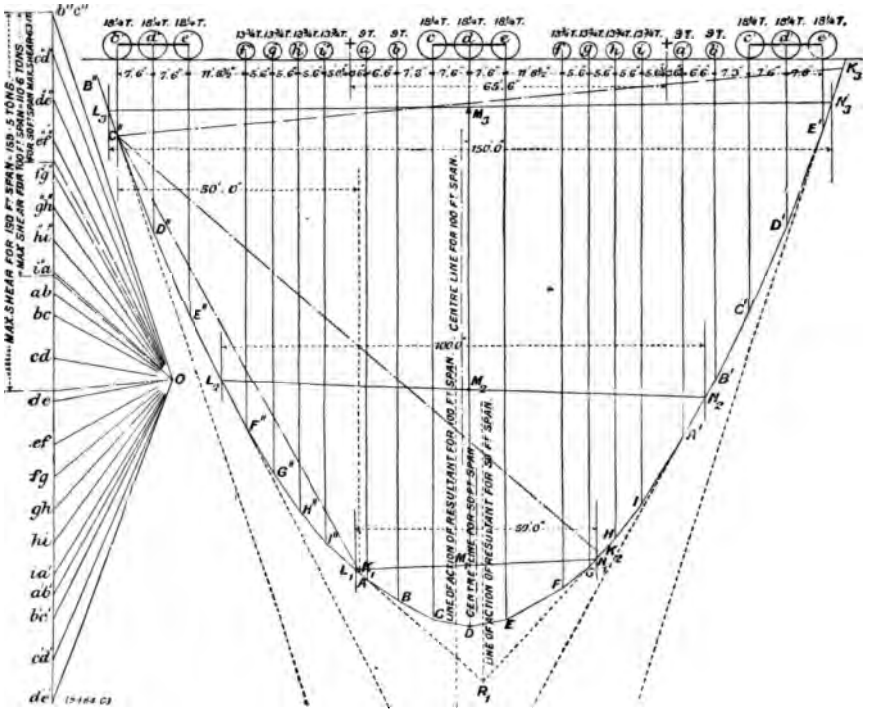
for a wide range of spans is illustrated in Fig. 65 by reference to a trai wheels coupled engines. The wheel diagram is laid off to a scale of $\frac{1}{8}$ a foot, and the axle-loads are laid off along the line $b''\,c''$–$d'\,e'$, to a $\frac{1}{16}$ inch to a ton; $b''\,c''$–$c''\,d''$ representing load c''; $c''\,d''$–$d''\,e''$ repr d'', and so on.

Opposite the mid-point of $c\,d$–$d\,e$ (representing load d), the pole O at a distance from it representing 50 tons on the load scale, and the f polygon B″ C″ D″ . . . K_3 drawn. The funicular polygon thus obtained able for all spans between 40 feet and 150 feet in length. For spans l about 40 feet the pole O should be taken nearer to the line of loads, spans exceeding about 150 feet it should be taken further away.

Application of the Diagram to the Determination of Greatest Moments.—For a span of 50 feet it has already been noticed that the loa bridge, when the greatest bending moment occurs, will be those marked Hence I″ A will be the first, and G H the last link of the corresponding f polygon; and as these intersect in R_1, the centre of gravity R of the loa will lie vertically above R_1 (see note on page 13). From the rule alread

know that if the greatest bending moment occurs under load *d*, the centre, *o'*, of span must lie midway between *d* and R; and if it occurs under load *e*, then *o'* l be midway between *e* and R. As the centre of gravity R, however, lies ch nearer to *d* than *e*, *d* will be the load under which the bending moment l be greatest. Bisect, therefore, the distance between the verticals through

Fig. 65.


MAX. SHEAR FOR 150 FT. SPAN = 153·5 TONS.
MAX. SHEAR FOR 100 FT. SPAN = 110·6 TONS.
MAX. SHEAR FOR 50 FT. SPAN = 68·2 TONS.
CENTRE LINE FOR 100 FT. SPAN.
LINE OF ACTION OF RESULTANT FOR 100 FT. SPAN.
CENTRE LINE FOR 50 FT. SPAN.
LINE OF ACTION OF RESULTANT FOR 50 FT. SPAN.
65'6"
150'0"
100'0"
50'0"
27'0"

and *d*, and obtain the centre-line for a 50-foot span; then lay off, horizontally, a tance representing 25 feet on either side of it, project vertically downwards on the funicular polygon at L_1 and N_1, and join these points. L_1 A B C . . . G N_1 l then be a bending moment diagram for the particular loads and span given, l D M_1 will represent the greatest bending moment required. If D M_1 be

measured in feet on the scale of lengths, and the distance of O from the lin loads be such as to represent 50 tons on the load scale, the bending mom required will be $M = D M_1 \times 50$ tons-feet.

On the diagram $D M_1$ was found to measure a distance representing, on scale of lengths, 13·125 feet, so that the greatest bending moment, $M = 13 \cdot 125$ $50 = 656 \cdot 25$ tons-feet, and the equivalent uniform load, $W = M \times \frac{8}{50} =$ tons.

Proceeding in the same way as before, the greatest bending moment fo span of 100 feet is represented by $D M_2$, and for a span of 150 feet by D $D M_2$, on the scale of lengths, represents 50·2 feet, giving as the greatest bend moment M, $50 \cdot 2 \times 50 = 2,510$ tons-feet; and as the equivalent uniform l $W = \frac{2,510 \times 8}{100} = 200 \cdot 8$ tons. The corresponding values for the 150-foot s are 110·375 feet, 5518·75 tons-feet, and 294·33 tons respectively.

Note.—After moving the scale, or strip of paper on which the terminals centre of the span are marked, under the loads, and thus obtaining what appe to be the load system giving the greatest maximum bending moment, and a determining the position of the centre of gravity of this load system, it must noted whether this load system still remains on the span or not when girder is placed with its centre midway between the centre of gravity and nearest wheel load. Occasionally it will be found that when the span is shi into the latter position, of the load system first selected a load near one end now be off the span and probably a new load will have come on at the ot end. This new load system should then be taken, and the position of its ce of gravity and the new position of the span determined.

A very little practice, however, will enable a student to ascertain, wit rapidity and certainty unequalled by any other method, the greatest maxim bending moments and the points at which they occur for a wide range of sp and for any train load.

Maximum Shear.—The greatest shear produced in a beam by a series wheel-loads moving over it will always occur at an abutment, and when one other of the loads is just on the point of moving off the beam.

In Fig. 66 loads $W_1, W_2 \ldots\ldots W_{n-1}$ are represented as acting upon a b

B of span L; the next load, W_n, being off the beam and at a distance z to the ht of B. Let W_1, at first, act just to the right of A, and let the resultant, R, of ; remaining loads W_2, W_3..... W_{n-1} on the beam act at a distance x from B; ; shear at A will then be $S_1 = W_1 + R\frac{x}{L}$. Now suppose the loads to move vards the left through a distance a_1, so that W_2 comes to A, R to a point tant $x + a_1$ from B, and (assuming a_1 to be greater than z) W_n to a point on ; beam distant $a_1 - z$ from B; the shear at A will then be:

$$S_2 = R\frac{x + a_1}{L} + W_n\frac{a_1 - z}{L},$$

; increase being

$$S_2 - S_1 = \frac{Ra_1}{L} + W_n\frac{a_1 - z}{L} - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

According, therefore, as $\frac{Ra_1}{L} + W_n\frac{a_1 - z}{L}$ is greater or less than W_1 will the ds W_2 or W_1 give the greater shear.

If z were greater than a_1, the term $W_n\frac{a_1 - z}{L}$ would not come in the pression (1) at all. Hence the limiting values of $S_2 - S_1$ are

$$\frac{Ra_1}{L} - W_1 \text{ and } (R + W_n)\frac{a_1}{L} - W_1.$$

If $\frac{R}{L}$ be greater than $\frac{W_1}{a_1}$, W_2 will give the greater shear; but if $\frac{R}{L}$ be less, d $\frac{R + W_n}{L}$ greater than $\frac{W_1}{a_1}$ equation (1) should be referred to.

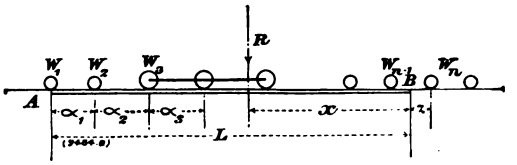
In practice the greatest shear will occur, usually, when the first of the aviest wheels of an engine is at an abutment. For examples:—Referring to ; train of six-wheels coupled engines shown on the diagram, Fig. 65, if wheel a re just moving off a span of 50 feet to the left, the other wheels on the span uld be b, c, d, e, f, and g, and R would be = 91¼ tons, W_1 (or a) 9 tons, and 6·5 feet.

Therefore, since $\frac{R}{L} = \frac{91{\cdot}25}{50}$ is greater than $\frac{W_1}{6{\cdot}5} = \frac{9}{6{\cdot}5}$, b at the left abutment

would give a greater shear than would *a*. If *b* were now moved u left abutment, *h* would come on the span, R would become = 96 t $a_1 = 7'\,3''$.

Therefore, since $\frac{R}{50} = \frac{96}{50}$ is greater than $\frac{b}{a_1} = \frac{9}{7{\cdot}25}$ wheel *c* at the left a would give greater shear than would *b*. Now move *c* up to the abutm *i* will come on the span. R (now the resultant of the loads *d*, *e*, *f*, *g*,

Fig. 66.



will be reduced to 91·5 tons, and a_1 increased to 7·5 feet, and since $\frac{R}{L} =$ now less than $\frac{c}{7{\cdot}5} = \frac{18{\cdot}25}{7{\cdot}5}$, and also $\frac{R + W_n (\text{or } a^1)}{L} = \frac{91{\cdot}5 + 9}{50}$ l $\frac{c}{7{\cdot}5} = \frac{18{\cdot}25}{7{\cdot}5}$, *c* at the left abutment would give a greater shear than wo

In the same way it can easily be shown that for all spans the a reaction (and therefore the shear) will be greatest when the first of the wheels is just arriving at the abutment.

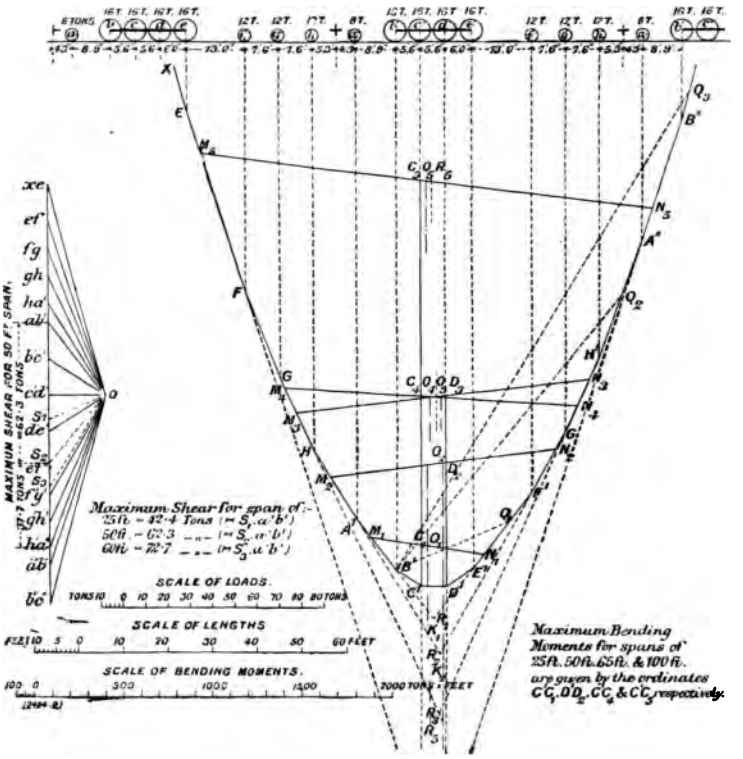
Graphical Determination of the Greatest Shear due to a Train-Lo method devised by the writer to render this operation as simple as p illustrated on the diagram, Fig. 65. Through the centre of the co wheel *c''* (the first of the heaviest wheels in this case) a vertical line is cut the funicular polygon in C'', and at a distance from it equal to another vertical is drawn to cut the funicular polygon in a point Joining K_1 and C'' we obtain K_1 C'' D'' E'' . . . K_1, the (Culman) di bending moments for the span when the controlling load is at an a Drawing from O, in the polar diagram, a line parallel to K_1 C'', this cut the line of loads in a point, the distance of which, from *b'' c''*, will the abutment reaction or the greatest shear required.

For a span of 50 feet the maximum shear, as noted on the di 63·1 tons.

The maximum shear for a 100-foot span (obtained by drawing a line from O parallel to $K_2 C''$) is 110·6 tons, and that for a span of 150 feet (obtained by drawing from O a line parallel to $K_3 c''$) is 159·5 tons.

In the diagram, Fig. 65, only the left abutment reactions are shown, but in

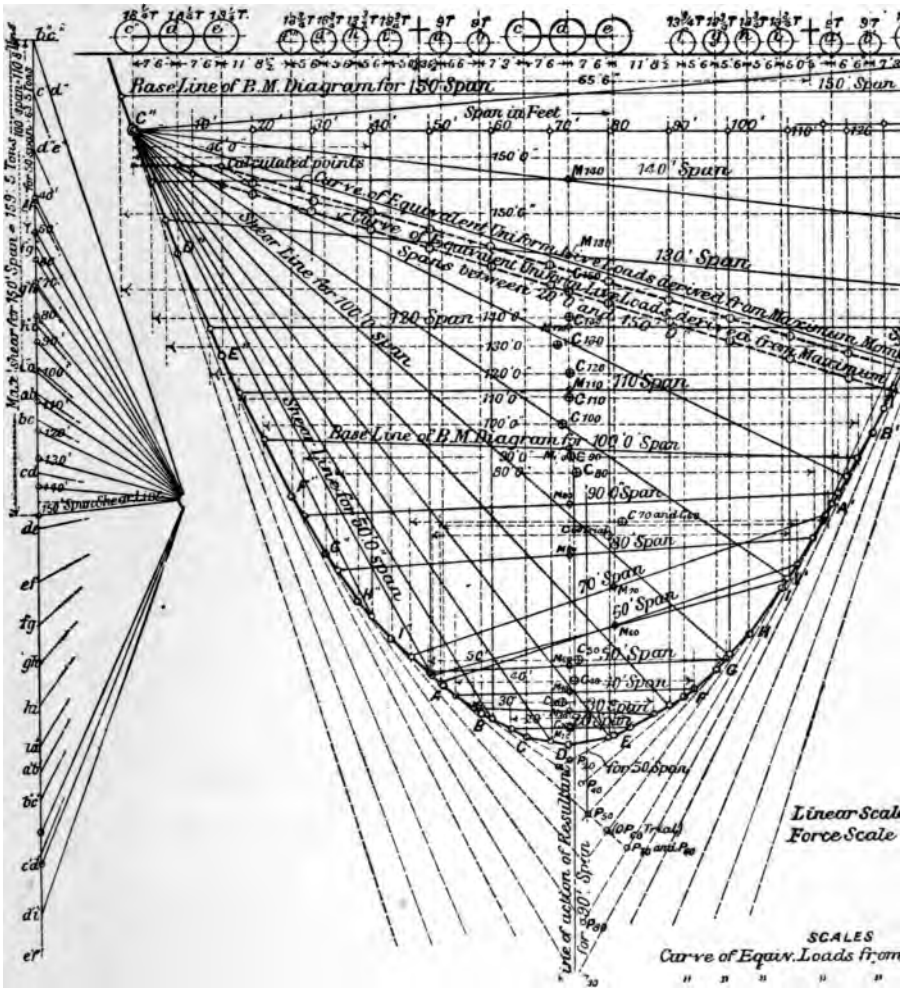
Fig. 67.


Maximum Shear for span of:-
25ft. = 42·4 Tons (= S_1, a'b')
50ft. = 62·3 ... (= S_2, a'b')
100ft. = 72·7 ... (= S_3, a'b')
SCALE OF LOADS.
SCALE OF LENGTHS
SCALE OF BENDING MOMENTS.
2000 TONS × FEET
Maximum Bending Moments for spans of 25ft. 50ft. 65ft. & 100ft. are given by the ordinates CC_1, DD_2, CC_2 & CC_3 respectively.

practice it may be necessary to determine the right abutment reactions as well. The controlling load for these latter reactions is *e'*, or *e*, but as the reactions themselves were found to be less, for the spans given, than the corresponding reactions at the left abutment, their values were not noted on the diagram. For spans less than about 37 feet, however, the greatest shear will occur at the right

abutment when the wheel *e* is over the point. To obtain the maximu
therefore, for a span less than 37 feet we must proceed as follows :—To

Fig. 68.



of E, and at a distance from it representing the span, draw a vertical li
the funicular polygon in a point S, say, and from O, in the force-diagr

ıe parallel to E S to cut the line of loads in a point T, say, then T – *ef* will esent the shear required.

[n the diagram, Fig. 67, the method of determining the maximum bending ıent and shear is illustrated by reference to a train of eight-wheels coupled nes.

[n Fig. 68 the complete graphical solution is given for the train of six-wheels)led engines above referred to; the greatest maximum bending moments

Span.	Equivalent Uniform Live Loads, in Tons, Derived from—		Distance of Centre of Span, for Maximum Bending, to Left of Wheel *d* or *e*.
	Maximum Bending Moments.	Maximum Shears.	
Feet.			Feet.
20	54·75	68·44	0·00
30	73·91	87·52	+ 1·04
40	88·23	105·04	– 0·85
50	105·02	126·16	– 1·39
60	124·53	144·72	– 0·90 (*e*)
70	143·22	162·78	– 0·90 (*e*)
80	160·49	182·26	– 0·94
90	179·90	202·24	– 0·36
100	199·95	221·37	+ 1·32
110	217·92	241·44	+ 0·12
120	235·36	261·34	+ 0·10
130	254·25	280·02	+ 2·44
140	274·25	298·96	+ 0·09
150	294·38	318·92	+ 0·08

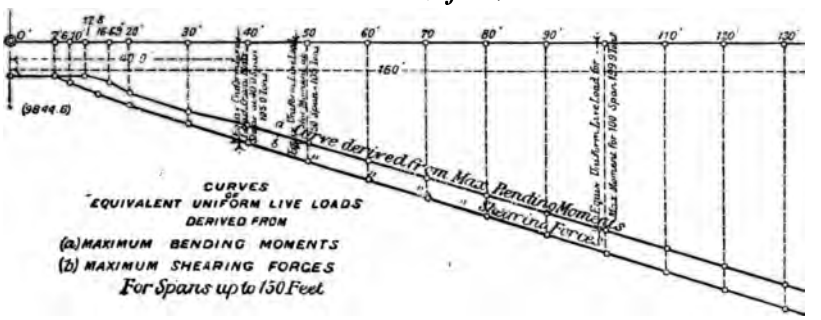
greatest maximum shears being obtained for all spans, at intervals of eet, from 20 feet to 150 feet.

Scaling off the maximum bending moments and maximum shears from this ram and doubling each of the latter, and dividing each of the former by eighth of the corresponding span $\left(W = M \div \frac{l}{8}\right)$ the equivalent uniform live s given in the table above are obtained. In this table the distances from el *d*, or *e*, at which the greatest maximum bending moments occur are

also entered, being regarded as positive when measured to the left fr and negative when measured to the right.

Taking the spans given in the above table as abscissæ and the uniform live loads derived from maximum bending moments as ord

Fig. 69.



curve of equivalent uniform live loads derived from maximum bendin shown in Fig. 69 is obtained. In a similar way the curve of equivale live loads derived from maximum shears is obtained. From this di equivalent uniform live load for any span can be readily obtained.

CHAPTER V.

NALYTICAL METHODS OF DETERMINING THE MAXIMUM BENDING MOMENT AND MAXIMUM SHEAR DUE TO A TRAIN-LOAD.

preparing tables of equivalent uniform live loads for a given type-train, it necessary to determine, for each span, the maximum bending moment and aximum shear produced as the train moves across the span. These deter-inations may be effected analytically, graphically, or by a combination of the o methods; whatever method be adopted, however, the work involved will be uch facilitated by observing at the outset that:

1. The maximum bending moment will occur under one of the heaviest heels of an engine when that wheel is at, or in the neighbourhood of, the ntre of the span, and when, at the same time, the train-load extends over the hole span.

2. The point of maximum bending moment and the centre of gravity of the hole oad on the span when maximum bending occurs are equidistant from the ntre of the span.

3. The maximum shear will always occur at an abutment, and when the an is fully loaded; and, usually, when the first of the more heavily loaded heels of an engine is on the point of moving off the span.

Analytical Method.—Let W_1 be the heaviest of the wheel-loads of an engine, nd L the span; then, for all spans from zero up to some particular value of $= L_1$, say, W_1 at the centre will give the maximum bending moment, $\frac{W_1 L}{4}$, nd the corresponding equivalent uniform live load will be $2 W_1$.

For two loads, W_1 and W_2 on the span, the maximum bending moment will cur under the heavier load, W_1, when this load and G, the centre of gravity of

both, are equidistant from O, the centre of the span. Let A B, Fig. 70 the span, and let d_1 be the (fixed) distance between the loads; then, for bending,

$$G O = O m = \frac{G m}{2} = \frac{G n}{2} \cdot \frac{W_2}{W_1} = \frac{m n}{2} \cdot \frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{W_2}{2 (W_1 + W_2)}$$

Reaction at

$$B = P_B = (W_1 + W_2) \frac{G A}{A B} = (W_1 + W_2) \frac{\left(\frac{L}{2} - G O\right)}{L},$$

and maximum bending moment $= P_B . B m$

$$= \frac{W_1 + W_2}{L} \cdot \left(\frac{L}{2} - G O\right)\left(\frac{L}{2} - O m\right)$$

$$= \frac{W_1 + W_2}{L} \left(\frac{L}{2} - \frac{W_2}{2 (W_1 + W_2)} \cdot d_1\right)^2$$

$$= \frac{((W_1 + W_2) L - W_2 . d_1)^2}{4 . L . (W_1 + W_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Fig. 70.

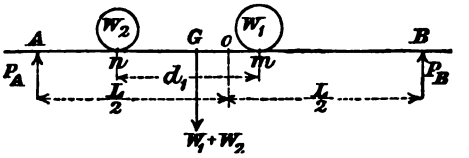
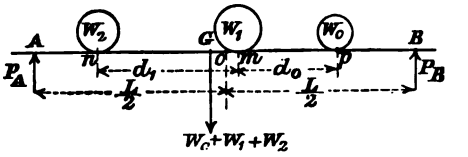


Fig. 71.



The maximum bending due to the two loads W_1 and W_2, therefo greater or less than that produced by the single load W_1, accordi expression (1) is greater or less than $W_1 \frac{L}{4}$.

That is, according as $((W_1 + W_2)\,L - W_2.d_1)^2 - W_1\,(W_1 + W_2)\,L^2$ $W_2\,(W_1 + W_2)\left\{L^2 - 2\,L.d_1 + \frac{W_2}{W_1 + W_2}.d_1^2\right\}$ is positive or negative.

Hence, when the span, L, is greater than $d_1\left(1 + \sqrt{\frac{W_1}{W_1 + W_2}}\right)$. (2)

e two loads $W_1 + W_2$ will give a greater maximum bending moment than ll the single load W_1. Again, if three loads, W_0, W_1 and W_2 (Fig. 71), be on e span, the distance of their centre of gravity, G, to the left of O (the centre of an), when maximum bending occurs, will be:

$$G\,O = O\,m = \frac{G\,m}{2} = \frac{W_2.n\,m - W_0.p\,m}{2\,(W_1 + W_2 + W_0)} = \frac{W_2.d_1 - W_0.d_0}{2\,(W_1 + W_2 + W_0)};$$

e reaction at the left terminal A will be:

$$P_A = (W_1 + W_2 + W_0)\,\frac{G\,B}{A\,B} = (W_1 + W_2 + W_0)\,\frac{\left(\frac{L}{2} + G\,O\right)}{L},$$

d the maximum bending moment, which occurs under wheel W_1, will be

$$\begin{aligned} &P_A.A\,m - W_2.n\,m \\ &= (W_1 + W_2 + W_0)\,\frac{\left(\frac{L}{2} + G\,O\right)}{L}\left(\frac{L}{2} + o\,m\right) - W_2.d_1 \\ &= \frac{(W_1 + W_2 + W_0)}{L}\left(\frac{L}{2} + \frac{W_2.d_1 - W_0.d_0}{2\,(W_1 + W_2 + W_0)}\right)^2 - W_2.d_1 \\ &= \frac{((W_1 + W_2 + W_0)\,L + W_2.d_1 - W_0.d_0)^2}{4.L.(W_1 + W_2 + W_0)} - W_2.d_1 \quad . \quad (3) \end{aligned}$$

Hence three loads will give a greater or less maximum bending moment an will two according as (3) is greater or less than (1); that is, according as e expression

$$\left\{(W_1 + W_2 + W_0)\,\frac{L}{4} + \frac{W_2 d_1 - W_0 d_0}{2} + \frac{(W_2 d_1 - W_0 d_0)^2}{4.L.(W_1 + W_2 + W_0)} - W_2.d_1\right\} - \left\{(W_1 + W_2)\,\frac{L}{4} - \frac{W_2 d_1}{2} + \frac{W_2^2 d_1^2}{4.L.(W_1 + W_2)}\right\},$$

$$L^2 - 2\,L.d_0 - \left\{\frac{W_2^2 d_1^2 + 2\,W_2\,(W_1 + W_2)\,d_1 d_0 - W_0\,(W_1 + W_2)\,d_0^2}{(W_1 + W_2)\,(W_1 + W_2 + W_0)}\right\}$$

positive or negative.

Hence three loads will give a greater or less maximum bending m according as

$$\text{L is} > \text{or} < \left\{ d_0 + \frac{(W_1 + W_2)\, d_0 + W_2 d_1}{\sqrt{(W_1 + W_2)\,(W_1 + W_2 + W_0)}} \right\} .$$

Taking, for example, the six-wheels coupled engine shown in F $W_1 = W_2 = W_0 = 18\frac{1}{4}$ tons, and $d_1 = d_0 = 7{\cdot}5$ feet. From equation (2), that one wheel will give a greater maximum bending moment than spans up to $7{\cdot}5\,(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}) = 12{\cdot}8$ feet, and two will give a greater ma than will three or one for spans ranging between 12·8 feet, and

$$7{\cdot}5 + \frac{(3 \times 7{\cdot}5)}{\sqrt{6}} = 16{\cdot}69 \text{ feet.}$$

For spans up to 12·8 feet, equivalent uniform load $= 2.W_1 = 36{\cdot}5$ From (1), when L = 16·69 feet, maximum bending moment

$$= \frac{((18{\cdot}25 + 18{\cdot}25)\,16{\cdot}69 - 18{\cdot}25 \times 7{\cdot}5)^2}{4 \times 16{\cdot}69\,(18{\cdot}25 + 18{\cdot}25)} = 92{\cdot}64 \text{ foot-tons,}$$

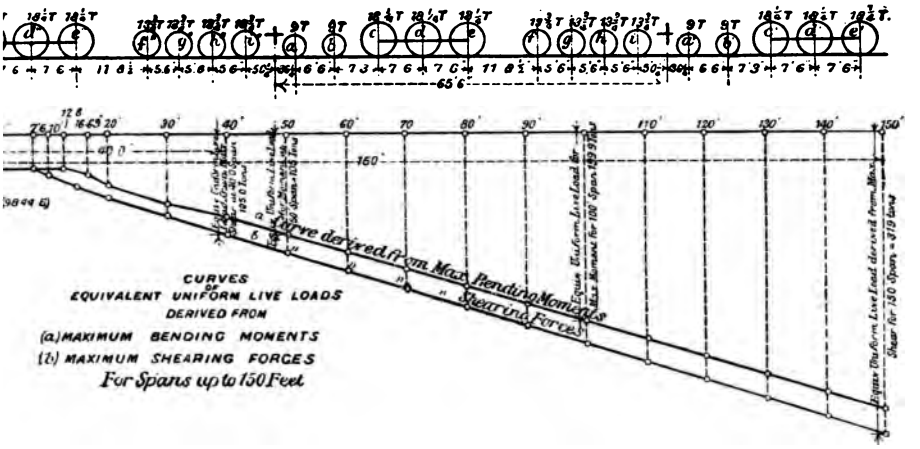
and equivalent uniform load $= 92{\cdot}64 \times \frac{8}{16{\cdot}69} = 44{\cdot}4$ tons.

Proceeding as above, the limits of the spans between which four, five given number of loads will give the greatest maximum bending moments found; but this mode of procedure is not to be recommended, excepting case of very short spans, or when absolute accuracy is required. In prac any given span, the load system giving the greatest maximum bending m may be determined very readily as follows:—Lay off the wheel-diag the type-train on any suitable scale, as shown in the diagram, Fig. underneath it move a strip of paper (or a scale) on which the span and line have been marked off, keeping the centre line in the neighbourhood centre of gravity of the more heavily loaded wheels of an engine. In t the load system required for any given span can generally be see glance; occasionally, however, there may be some doubt as to whether t system selected in this way is the correct one or not; as, for instance, w moving the paper strip a little to the right or left, so as to take in an ext the new load system seems almost as promising as the one first select

h a case it may be necessary to determine the maximum bending moments for) (or even three) load systems, in order to get the bending moment required.

Having determined the load system for any given span, the maximum ıding moment and the point at which it occurs may be determined, ılytically, as shown by the following example. Let the span be 50 feet, l the type-train that represented in Fig. 72; the load system giving maximum

Fig. 72.



ıding includes the wheel (or axle) loads marked a to g, and, therefore, total load on the span is

$$W = 9 + 9 + 18\tfrac{1}{4} + 18\tfrac{1}{4} + 18\tfrac{1}{4} + 13\tfrac{3}{4} + 13\tfrac{3}{4} = 100{\cdot}25 \text{ tons.}$$

Taking moments about wheel d, and dividing by W, we obtain, as the tance of the centre of gravity of the load system to the left of d,

$$x = (18{\cdot}25 \times 7{\cdot}5 + 9 \times 14{\cdot}75 + 9 \times 21{\cdot}25 - 18{\cdot}25 \times 7{\cdot}5 - 13{\cdot}75 \times 19{\cdot}20 - 13{\cdot}75 \times 24{\cdot}70) \div 100{\cdot}25 = -2{\cdot}788 \text{ feet.}$$

e maximum bending moment usually occurs under that wheel which is ırest to the centre of gravity of the total load, and this is always the e if the wheel be d. If, however, the centre of gravity fall a little nearer r e than d, the bending moments under both c and d, or e and d, should be

obtained, and the greater of the two values taken. In the present exam maximum bending moment will occur under wheel d, when that wheel distance of $\frac{2 \cdot 788}{2} = 1 \cdot 394$ foot to the left of the centre of the span.

The distance of the centre of gravity of the total load W_1 from th terminal of the span = the distance of wheel d from the left terminal = $1 \cdot 394$ foot = $23 \cdot 606$ feet. Therefore, reaction at left terminal

$$= \frac{100 \cdot 25 \times 23 \cdot 606}{50} = 47 \cdot 33 \text{ tons},$$

the algebraical sum of the moments of forces acting to the left of d that point—that is, the maximum bending moment required,

$$= 47 \cdot 33 \times 23 \cdot 606 - 18 \cdot 25 \times 7 \cdot 5 - 9 \times 14 \cdot 75 - 9 \times 21 \cdot 25$$
$$= 656 \cdot 4 \text{ foot-tons.}$$

and the equivalent uniform load is

$$w' = 656 \cdot 4 \times \frac{8}{50} = 105 \cdot 02 \text{ tons.}$$

In preparing tables of equivalent live loads derived from the ma bending moments, the work may advantageously be systematically arrang tabular form, as shown in Tables I, II, and III. In Table I the first

TABLE I.

Wheel Load.	Distance of Load from Wheel d.	+ Moments about Wheel d.	Total + Moments about d.	Wheel Load.	Distance of Load from Wheel d.	− Moments about Wheel d.	− To
Tons.	Feet.	Tons × Feet.	Tons × Feet.	Tons.	Feet.	Tons × Feet.	To
$c = 18 \cdot 25$	7·50	136·87	136·87	$c = 18 \cdot 25$	7·50	136·88	
$b = 9 \cdot 00$	14·75	132·75	269·62	$f = 13 \cdot 75$	19·21	264·00	
$a = 9 \cdot 00$	21·25	191·25	460·87	$g = 13 \cdot 75$	24·71	339·63	
$i'' = 13 \cdot 75$	29·79	409·61	870·48	$h = 13 \cdot 75$	30·21	415·25	1
$h'' = 13 \cdot 75$	35·29	485·37	1355·85	$i = 13 \cdot 75$	35·71	491·88	1
$g'' = 13 \cdot 75$	40·79	561·00	1916·85	$a' = 9 \cdot 00$	44·25	398·25	2
$f'' = 13 \cdot 75$	46·29	636·63	2553·48	$b' = 9 \cdot 00$	50·75	456·75	2
$c'' = 18 \cdot 25$	58·00	1058·50	3611·98	$c' = 18 \cdot 25$	58·00	1058·50	3
$d'' = 18 \cdot 25$	65·50	1195·38	4807·36	$d' = 18 \cdot 25$	65·50	1195·38	4
$e'' = 18 \cdot 25$	73·00	1332·25	6139·61	$e' = 18 \cdot 25$	73·00	1332·25	6

the loads acting to the left of wheel *d* (the wheel under which the greater ber of maximum bending moments occur), the second column their ances from that load, the third column the products of load × distance, and fourth columns the sums of these products. The fifth, sixth, seventh, and h columns respectively give similar values for the loads acting to the of *d*.

n the first column of Table II the spans are set down, and in the second

TABLE II.

Load System giving Maximum Bending.	Moment (M) of Load System about Wheel *d*.	Total Load (W).	Distance $\left(\frac{M}{W}\right)$ of centre of Gravity of Load System to Left of		Distance of Centre of Span, for Maximum Bending, to Left of		
			Wheel *d*.	Wheel *e*.	Wheel *d*.	Wheel *e*.	Centre of Gravity of Load System.
	Tons × Feet.	Tons.	Feet.	Feet.	Feet.	Feet.	Feet.
c to *e*	0·00	54·75	0·00	..	0·00	..	0·00
b „ *e*	+ 132·75	63·75	+ 2·08	..	1·04	..	− 1·04
b „ *f*	− 131·25	77·50	− 1·69	..	− 0·85	..	+ 0·85
a „ *g*	− 279·64	100·25	− 2·79	..	− 1·39	..	+ 1·39
a „ *i*	− 1186·75	127·75	− 9·29	− 1·79	..	− 0·90	+ 0·90
a „ *i*	− 1186·75	127·75	− 9·29	− 1·79	..	− 0·90	+ 0·90
h″ „ *i*	− 291·76	155·25	− 1·88	..	− 0·94	..	+ 0·94
g″ „ *a*′	− 129·01	178·00	− 0·73	..	− 0·37	..	+ 0·37
f″ „ *a*′	+ 507·61	191·75	+ 2·65	..	+ 1·33	..	− 1·33
f″ „ *b*′	+ 50·86	200·75	+ 0·25	..	+ 0·12	..	− 0·12
e″ „ *c*′	+ 50·86	237·25	+ 0·21	..	+ 0·10	..	− 0·10
d″ „ *c*′	+ 1246·24	255·50	+ 4·88	..	+ 2·44	..	− 2·44
d″ „ *d*′	+ 50·86	273·75	+ 0·19	..	+ 0·09	..	− 0·09
c″ „ *c*′	+ 50·86	310·25	+ 0·16	..	+ 0·08	..	− 0·08

nn the corresponding load systems giving maximum bending moment. In hird column the algebraic sum of the moments with respect to wheel *d* are ı; these being the differences of the values given in columns 4 and 8 of ə I. Thus, for a span of 50 feet the load system includes the loads marked *g*; from Table I the sum of the moments about *d* of the loads *a* to *d*

= 460·87 foot-tons, and the sum of the moments of loads *d* to *g* = Therefore, algebraic sum of moments for the load system *a* to *g* = tons × feet.

Dividing the moments given in column 3, Table II, by the total l in column 4, we obtain the distances given in column 5, and are thus calculate, as shown above, the abutment reactions, the maximu moments, and the equivalent uniform loads given respectively in co and 10 of Table III.

TABLE III.

Span (S).	Distance from Left Terminal to Point (*d* or *e*). Maximum Bending.	Reaction (R) at Left Terminal.	Moment (M_1) of reaction about Point (*d* or *e*) of Maximum Bending.		Load System (K) to Left of Point of Maximum Bending.	Moment (M_2) of Load System (K) about		Max Ben Mo (M_1 -
			d.	*e*.		Wheel *d*.	Wheel *e*.	
Feet. 0 to 12·8	Feet. ..	Tons. ..	Tons × Feet. ..	Tons × Feet. ..	..	Tons × Feet. ..	Tons × Feet. ..	Tons .
16·69	..	..	..	..	..	..	..	92
20	10·00	27·375	273·75	..	*c*	136·87	..	136
30	16·04	34·087	546·79	..	*b* to *c*	269·62	..	277
40	19·15	37·109	710·77	..	*b* „ *c*	269·62	..	441
50	23·61	47·330	1117·27	..	*a* „ *c*	460·87	..	656
60	29·10	61·969	..	1803·64	*a* „ *d*	..	869·63	934
70	34·10	62·242	..	2122·76	*a* „ *d*	..	869·63	1253
80	39·06	75·801	2960·79	..	*h*″ „ *c*	1355·86	..	1604
90	44·64	88·283	3940·69	..	*g*″ „ *c*	1916·86	..	2023
100	51·33	98·432	5052·83	..	*f*″ „ *c*	2553·49	..	2499
110	55·12	100·605	5545·95	..	*f*″ „ *c*	2553·49	..	2996
120	60·10	118·833	7142·46	..	*e*″ „ *c*	3612·00	..	3530
130	67·44	132·546	8938·90	..	*d*″ „ *c*	4807·37	..	4131
140	70·10	137·057	9606·74	..	*d*″ „ *c*	4807·37	..	4799
150	75·08	155·290	11,659·17	..	*c*″ „ *c*	6139·62	..	5519

In the diagram, Fig. 72, the spans given in column 1, Table III, as abscissæ, and the corresponding equivalent uniform loads given in as ordinates. Joining the lower extremities of consecutive ordinates

se, be the greater of the two values given in columns 5 and 10, Table IV. n a diagram thus obtained the equivalent uniform load for any span can be ɔd off at once.

Graphical Methods.—The graphical methods devised by the author for deter- ing the maximum bending moments and maximum shears required in the ɔaration of equivalent uniform loads were fully explained in Chapter IV.

[n order to ascertain the degree of accuracy which could be obtained in :tice by the use of these methods, and by the exercise of ordinary care and l, a student of the author's, Mr. Robert Boyle, was set to work out, indepen- ;ly, the example illustrated in Fig. 68, Chapter IV. Mr. Boyle's results are :n in Table V, as well as the actual values calculated by the author. The

TABLE V.

ı.	Equivalent Uniform Live Loads, in Tons, derived from						Distance of Centre of Span, for Maximum Bending, to Left of Wheel *d* or *e*.	
	Maximum Bending Moments.			Maximum Shears.				
	Mr. Boyle's Results.	Calculated Values.	Error Per Cent.	Mr. Boyle's Results.	Calculated Values.	Error Per Cent.	Mr. Boyle's Results.	Calculated Values.
t.							Feet.	Feet.
)	55·00	54·75	0·5	68·00	68·44	0·66	0·00	0·00
)	74·20	73·91	0·4	87·00	87·52	0·58	+ 1·00	+ 1·04
)	88·70	88·23	0·52	106·20	105·04	1·09	− 0·90	− 0·85
)	105·00	105·02	0·02	127·00	126·16	0·67	− 1·45	− 1·39
)	124·00	124·53	0·43	145·40	144·72	0·46	− 1·00 (*e*)	− 0·90 (*e*)
)	143·00	143·22	0·15	163·00	162·78	0·14	− 1·00 (*e*)	− 0·90 (*e*)
)	160·60	160·49	0·07	182·50	182·26	0·14	− 1·08	− 0·94
)	179·40	179·90	0·28	202·50	202·24	0·13	− 0·42	− 0·36
)	199·60	199·95	0·17	221·70	221·37	0·17	+ 1·17	+ 1·32
)	216·80	217·92	0·55	241·50	241·44	0·03	+ 0·12	+ 0·12
)	234·60	235·36	0·32	262·00	261·34	0·26	+ 0·17	+ 0·10
)	253·50	254·25	0·30	280·50	280·02	0·17	+ 2·50	+ 2·44
)	272·50	274·25	0·64	299·50	298·96	0·01	+ 0·12	+ 0·09
)	293·00	294·38	0·46	319·00	318·92	0·03	+ 0·15	+ 0·08

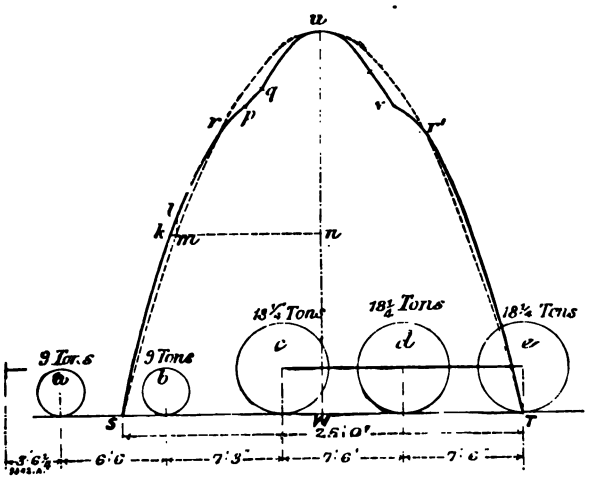
e agreement of these results with the actual values seems to show that the ɔhical methods are not only simple and expeditious, but fairly accurate ɤell.

CHAPTER VI.

Diagrams of Maximum Bending Moments.

The equivalent uniform live load derived from the greatest maximum l moment having been determined for any given type-train and span, a corresponding parabola or diagram of bending moments drawn, it v found that at the haunches the maximum moments produced by the

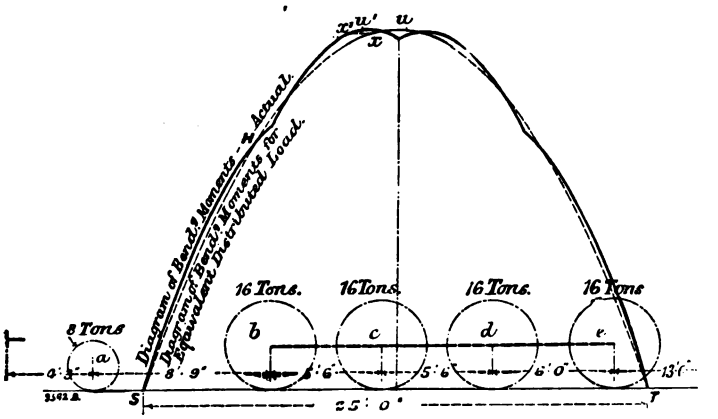
Fig. 73.



wheel-loads are somewhat greater than the moments given by the pa In Fig. 73, for instance, where the ordinates to the full line S *k u* T re the maximum moments due to the actual wheel-loads as the six-wheel c engine shown moves across the span from right to left, and those parabola the moments due to the equivalent uniform load, it is see

tween r and S and r' and T, the maximum moments everywhere exceed those ven by the parabola. At the distance $m\,n$ = 9 feet from the centre of the an, the excess, $m\,l$, amounts to 10 per cent. of the bending moment 3·9 tons × feet) at m, or 4·8 per cent. of that at the centre—205·3 tons × et. Again, for the eight-wheel coupled engine, partly shown in Fig. 74, d for a like span of 25 feet, the excess is nowhere greater than about 3·5 r cent. of the maxima—225·3 tons × feet; and for the 75-foot span and in-load represented in Fig. 75 the excess at V in the bending moment agram is only some 25 tons × feet, or less than 2 per cent. of the maximum—

Fig. 74.



16·5 tons × feet. This excess bending at the haunches may be provided r in practice, when the girders are designed from the equivalent uniform ad, by extending the flange-plates some distance beyond the points at which, cording to the parabola, they ought to stop short. For the case shown in g. 73 the greatest extension of flange-plates required for this purpose is that presented by Km, or about 4 inches; for the case shown in Fig. 74, between and H, it is less than 7 inches, and for the case given in Fig. 75 it is not eater than about 10 inches.

When, however, the point at which maximum bending occurs is some stance away from the centre, the excess of the actual maximum bending

moments near that point, over and above those given by the paral require a greater extension of the outer flange-plates than the 1 (or less) required at the haunches. For example, in Fig. 74, where u' of maximum bending is nearly 18 inches from the centre of the extension required for the outer flange-plates may be anything up to thi

Fig. 75.

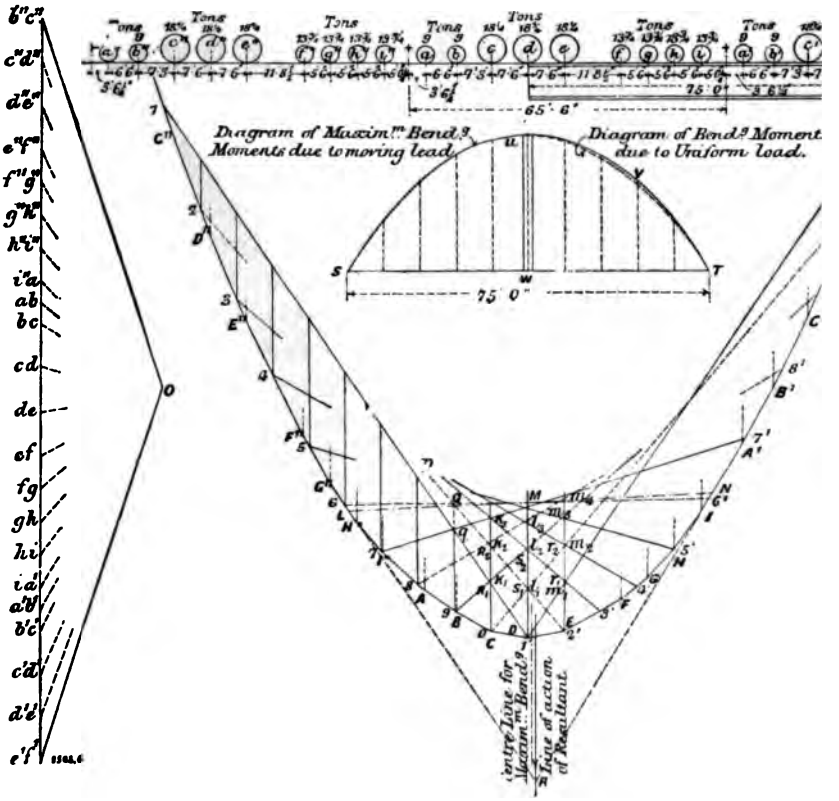


Diagram of Maxim.m Bend.g Moments due to moving load.
Diagram of Bend.g Moment due to Uniform load.
75' 0"
65' 6"
Centre Line for Maxim.m Bend.g
Line of action of Resultant.

Again, in the case of a skew bridge the point of maximum ben occur at a considerable distance to one side of the centre, du unsymmetrical manner in which it is loaded; hence, in such a tables of equivalent uniform loads cannot be applied, and it is

essary to draw out the actual diagram of maximum bending moments ore preparing the working drawings. It may also be advisable, before pre- ing the working drawings, to draw out the diagram of maximum moments bridges which are not on the skew, or where the amount of obliquity is ligibly small, and for such cases the writer has found the following methods editious and sufficiently accurate (when drawn out on a fairly large scale) practical purposes.

Description of Diagram of Maximum Bending Moments (Fig. 75).—The eel diagram and funicular polygon C″ D″ E″ . . . D′ E′ are first drawn as eady explained in Chap. IV, and the diagram of maximum bending moments structed by either of the two methods illustrated in Fig. 75.

First Method.—The girder is placed, in the first instance, with its right minal under wheel *d*, when the corresponding diagram of bending moment l be: 1, C″, D″, E″ . . . B C 1′. Vertical lines are then drawn through *d*, l at intervals of one-tenth (or one-twentieth) of the span to the right and ; of it, and some of these, cutting the diagram of bending moments, will give intercepts $0\,R_1$, $9q$, $8p$ . . ., which represent the bending moments at the pective distances from the right terminal of one-tenth, two-tenths, three- ths the span, and so on. The girder is now advanced towards the right ough a distance of one-tenth the span, when the new diagram of bending- ments will be 2 D″ E″ . . . 0 1′ 2′, and the new intercepts $1'\,S_1$, $_2$, 9 Q. . . .

Advancing the girder in this way through successive intervals of one-tenth n until the left terminal comes under *d* (or further, if the right terminal not come under or passed the corresponding wheel *d′* of the next engine), obtain for each of the points taken along the span a set of different values the bending moment, each of which should be scaled off the diagram and ulated. The greatest maximum bending moment, D M, should also be ermined, and the distance (10 inches) from the centre at which it occurs, ore proceeding to plot the diagram of maximum bending moments S U T. r points at equal distances from the terminals, of course, only the greatest the values in the two sets tabulated would be required in plotting the gram S U T.

In the great majority of cases the bending moment at any point ε span will be a maximum for that point when the point is under one of the heavy wheel-loads, and when, at the same time, the train-load over the whole span. In order to determine the maximum moment given point, therefore, it will only be necessary to determine the valu as the heavy wheel-loads come successively over the point; hence the f mode of procedure.

Second Method.—Place the girder with its left terminal under (Fig. 75), obtaining, as the diagram of bending moments, th 1′EFG . . . E′1″, and the intercept, $2'm_1$. Now advance the girde left until the left terminal comes under the wheel *c*, and obtain the new of moments 0DEF . . . D′0′, the intercept $1'l_1$ at a distance o 6 inches (the distance between wheels *c* and *d*) from the left termina intercept $2'm_2$, at a distance of 15 feet. Advancing the girder in towards the left through successive intervals of 7 feet 6 inches (or distance if the span be a very short one, or if greater accuracy be requi the centre of the span is reached, or passed, we obtain the moments und *e*, *d* and *c*, represented respectively by the intercepts $2'm_1$, $1'l_1$, and 0 point 7 feet 6 inches from the left terminal, by $2'm_2$, $1'l_2$, and $0K_2$ fc 15 feet from the terminal, by $2'm_3$, $1'l_3$, and $0K_3$ for a point 22 feet from the terminal, and so on. The girder is now placed with its right under *d*, and then advanced towards the right through successive of 7 feet 6 inches, thus obtaining the intercepts $0R_1$, $1'S_1$, and representing the bending moments under wheels *c*, *d* and *e* respectiv point 7 feet 6 inches from the right terminal, the intercepts $0R_2$, $2'T_2$ for a point 15 feet from the terminal, and so on. The values moments in tons-feet, together with the greatest maxima, DM, may tabulated as on page 70.

In plotting the diagram of maximum bending moments, of course, greatest of the six values obtained for each point—those underlined—taken.

To show how the method is to be applied to the case of a train-load the heavy wheels of the engines are not equally spaced, as in the

mple, we will take the case of a train of the eight-wheel coupled engines ily shown in Fig. 74. In this case the moments under wheels *b*, *c* and *d* ıld be first determined, as above, for a series of points 5 feet 6 inches apart, then the operation repeated for points under wheels *d* and *e* at intervals of et apart. We should thus obtain two sets of ordinates, which, being plotted, ither with the ordinate representing the greatest maxima, and a fair curve

Distance from a Terminal.			Bending Moments in Ton-Feet under Load.		
			c.	*d.*	*e.*
Ft.	Ins.				
7	6	left	*537*	516	495
		right	483	508	530
15	0	left	930	*937*	895
		right	883	920	891
22	6	left	1,187	*1,225*	1,205
		right	1,183	1,180	1,166
30	0	left	1,337	1,375	*1,380*
		right	1,337	1,341	1,350
37	6	left	1,387	1,415	*1,416*
		right	1,387	1,415	1,415
Chief maxima (10 inches from centre).			*1416·5*		

wn through the extremities of some and slightly above those of the others, . give the maxima at every point.

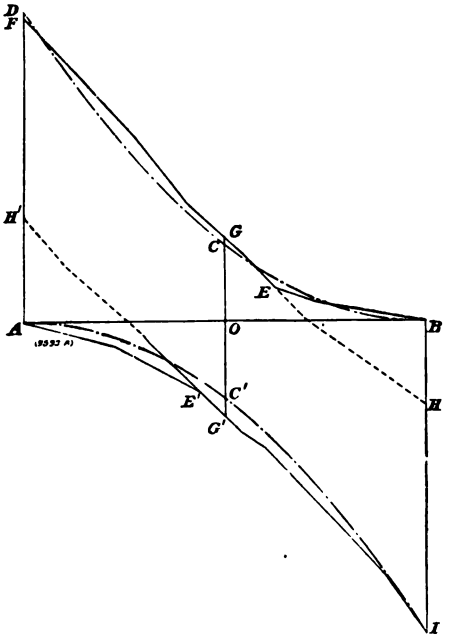
As the funicular polygon and wheel diagram are applicable to a great variety pans, the constructions above indicated should be made on tracing-paper, or, er still, "butter" paper, as this paper is sufficiently transparent for the pose, and presents a better surface for drawing upon than ordinary ing paper.

CHAPTER VII.

Diagrams of Maximum Shear.

The shear at any point of a beam acted upon by a uniform r
maximum when the load extends over the segment of the be
point and the farther abutment; and further, this maxi

Fig. 76.



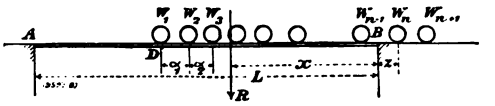
proportional to the ordinate, at the point, of a parabola B C D, or
If, for any given type-train and span, the parabola corresponding
lent uniform live load derived from the maximum shear" be drav
given by the ordinate to this parabola for any point along the spa

ıe less, and sometimes very considerably less, than the maximum shear luced at the point by the actual wheel-loads.

For example, in Fig. 76, the maximum positive shears produced by an engine he type shown in Fig. 78 as it moves across the span from right to left are n by the ordinates to the full line B E G F, the maximum negative shears the ordinates to the line A E′ G′ I, and the shears due to the "equivalent orm load" by the ordinates to the parabolas B C D and A C′ I. In this case, efore, we see that everywhere, except at the abutments, the actual maximum .rs are greater than the shears as given by the parabola; the excess, C′ G′, ıe centre amounting to about 21 per cent.

Similarly, for the type-train shown in Figs. 78 and 79, and a span of 75 feet, diagram of maximum shears, Fig. 80, shows that the maximum shears due :he actual wheel-loads are again everywhere greater than the shears esponding to the equivalent uniform load. In this case, at the centre of the

Fig. 77.



ı, the actual maximum, when the axle-loads are taken, is equal to 24·2 tons, .e the shear due to the equivalent uniform load is only 21·7 tons, or 3 per cent. less. It is obvious, therefore, that while tables of "equivalent orm live loads" derived from the maximum shears may be of great value in ing the preliminary calculations, it will often be necessary to draw out the al diagrams of maximum shears, or at least determine the maximum shear ıe centre and at one or two other points along the span, before preparing the cing drawings.

The work of constructing diagrams of maximum shear may be considerably itated by noting the following observations:—In Fig. 76 the maximum tive shear for any point under B E occurs when the first wheel *a* is over the t, and for the remainder of the span it occurs when the first heavy wheel *c* ver the point. Again, assuming the engine as running backwards from left ight, the maximum negative shear for the part above A E′ occurs at any

point when the first wheel, i, is over the point, and for the remainder of t
it occurs when the wheel e is over the point. This would seem to
that the maximum shear at any point will occur when either a or c
the point if the engine be running forwards, or under i or e if
backwards. This point may be investigated analytically as follows:—

To determine which of the wheel-loads at a given point D will g
maximum shear at the point, assume the train-load, in the first instance,
moved so far along the span from the farther abutment B (Fig. 77) as t
the front wheel W_1 over the point; and let R be the total load on th
and x the distance of its centre of gravity from B. The supporting for
and shear just in front of W_1 will then be $= R.\frac{x}{L}$ (1); and so long, ther
no other load comes on or goes off the beam, the shear will vary
according to the ordinates of a straight line.

Further, with wheel W_1 over the point D, let the loads (of which I
resultant) on the beam be $W_1, W_2, W_3 \ldots W_{n-1}$, and let the first load
beam be W_n and z its distance to the right of B; then, if z be less
the shear at D, as the train moves towards the left until W_2 com
the point, will increase to

$$R\frac{x + a_1}{L} + W_n\frac{a_1 - z}{L} - W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Of the two wheels W_1 and W_2 therefore, W_2 at D will give the greater
shear at the point according as the expression

$$\frac{R}{L} + W_n\frac{a_1 - z}{a_1.L} - \frac{W_1}{a_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

is positive or negative.

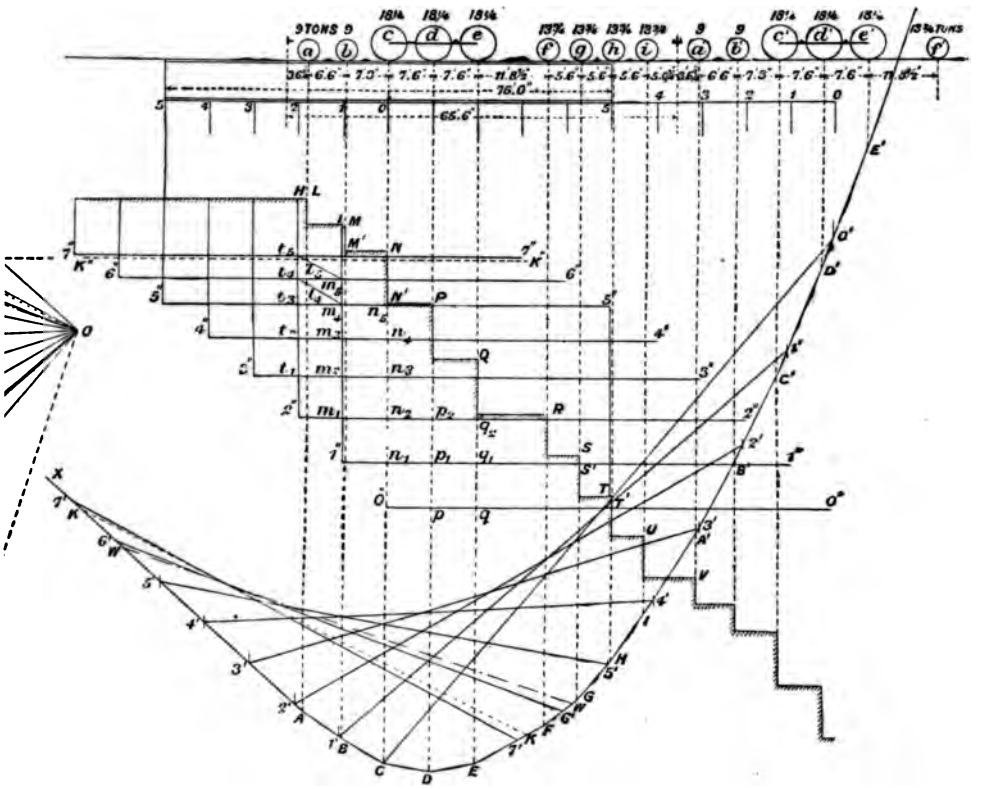
Again, with wheel W_2 over D, let R′ be the total load on the be
x' the distance of its centre of gravity from B; and let W_{n+1} be the fi
off the beam, and z' its distance to the right of B. Then, if z' be less th
the distance between the wheels W_2 and W_3, of these two wheels at D,
give the greater or less shear according as

$$\frac{R'}{L} + W_{n+1}\frac{a_2 - z'}{a_2.L} - \frac{W_2}{a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

is positive or negative.

Now for the train of six-wheels coupled engines shown in Figs. 78 and 79, ving from right to left, $W_1 = 9$ tons $= W_2$, $W_3 = 18\frac{1}{4}$ tons, $a_1 = 6{\cdot}5$ feet, $a_2 = 7{\cdot}25$ feet. Hence, for this case, expressions (3) and (4) cannot be pectively positive and negative, or, in other words, W_2 can never give a

Fig. 78.



ximum shear at any point. In the same way it can easily be shown (see ge 49) that W_3 (or wheel *c*) at D will give a greater shear at that point than l W_4, and W_4 a greater shear than W_5, and so on.

When the train shown in Fig. 78, therefore, is moving from right to left, maximum shear at any point along the span will occur when either wheel *a*

or wheel *c* is over the point; and in the same way, when the train is
from left to right, Fig. 79, it can easily be shown that maximum she
always occur under either wheel *i* or wheel *c*.

Diagrams of Maximum Shear Construction.

On the diagram already drawn and used in determining the g
maximum bending moment, etc., add the load steps L M M′ N P Q
Fig. 78, and then, on a sheet of tracing paper placed over the diagram, d
a distance apart equal to one-tenth of the span, a series of vertical lir
of which is made to pass through the centre of wheel *c*. These lines w
the funicular polygon in points 7′, 6′, 5′ . . . Now assume the girder
with its left terminal below wheel *c*; the loads on the girder will t
c, *d*, *e* . . . *a*′, *b*′, *c*′, and *d*′, and the corresponding diagram of bending m
will be C D E . . . C′ D′ O′. Through point O in the force polygon dr
parallel to the closing line C *o*′ to cut the line of loads in *o*, and through
the horizontal line *o*″ *o*″ under the girder.

The diagram of positive shears will then be *o*″ N N′ P Q . . . T T′
representing the shears at the left terminal, and *p* P, *q* Q . . . the shear
distances of 0·1, 0·2, . . . of the span from that terminal. If the gi
now advanced to the left, under the loads, through a distance of one-tent
the new diagram of bending moments will be 1′ C D E . . . B′ C′ 1′;
a line O 1 be drawn parallel to the closing line 1′ 1′ to cut the line of loa
and through this latter point a horizontal line 1″ 1″ be drawn under the
we shall obtain the new diagram of positive shears 1″ M M′ N . . .
which the shears at the left terminal and at the distances from it of 0·
0·3 span . . . are now represented by 1″ I, n_1 N, p_1 P. . . . Advancing the
in this way through successive intervals of one-tenth span we obtain a
of diagrams of positive shear corresponding to the base lines 0″ 0″
2″ 2″ . . . each of which gives a value for the shear at the left termir
at the distances of 0·1, 0·2, 0·3, 0·4, and 0·5 span from it. These
can now be scaled from the diagrams and tabulated, and the grea
the values given for each point along the span taken and used in p

diagram of maximum positive shears. A similar method may then be ɔted as shown in Fig. 79, for constructing the diagram of maximum negative ırs. As the maximum positive shear at any point, however, occurs when er wheel c or wheel a is over the point, and the maximum negative shear n either wheel e or wheel i is over the point, the construction of the ram is facilitated considerably by adopting the following procedure. ler wheel c the shears at the left terminal, and at the distances from it ·1, 0·2, 0·3, 0·4, and 0·5 span, are given by $0''$ N, n_1 N, n_2 N, n_3 N, n_4 N n_5 N respectively; or, in the force diagram, by 0–$b\,c$, 1–$b\,c$, 2–$b\,c$, 3–$b\,c$, c, and 5–$b\,c$. To determine the shears under wheel a we may proceed as ɔws:—For the position of the girder represented by the base line $6''6''$ the ır at the centre of the span is m_5 I, and for the position $7''7''$ it is t_5 H. r during this change in the girder's position, if the total load upon the er remained the same the shear at the centre would, according to equation page 73, diminish at a uniform rate, as represented by the line $m_5 t_5$; and, efore, when wheel a was over the centre the shear at that point would be l_5 L. ilarly, at a distance of one-tenth span from the centre, when wheel a was the point the shear would be l_4 L, and so on. If, however, during the ıge of position of the girder a new load came on, or a load went off the er, the shears under load a would not be given exactly by l_5 L, l_4 L, etc.; if the steps through which the girder is advanced were small—say, one-ıtieth of the span—the errors thus introduced would be negligible.

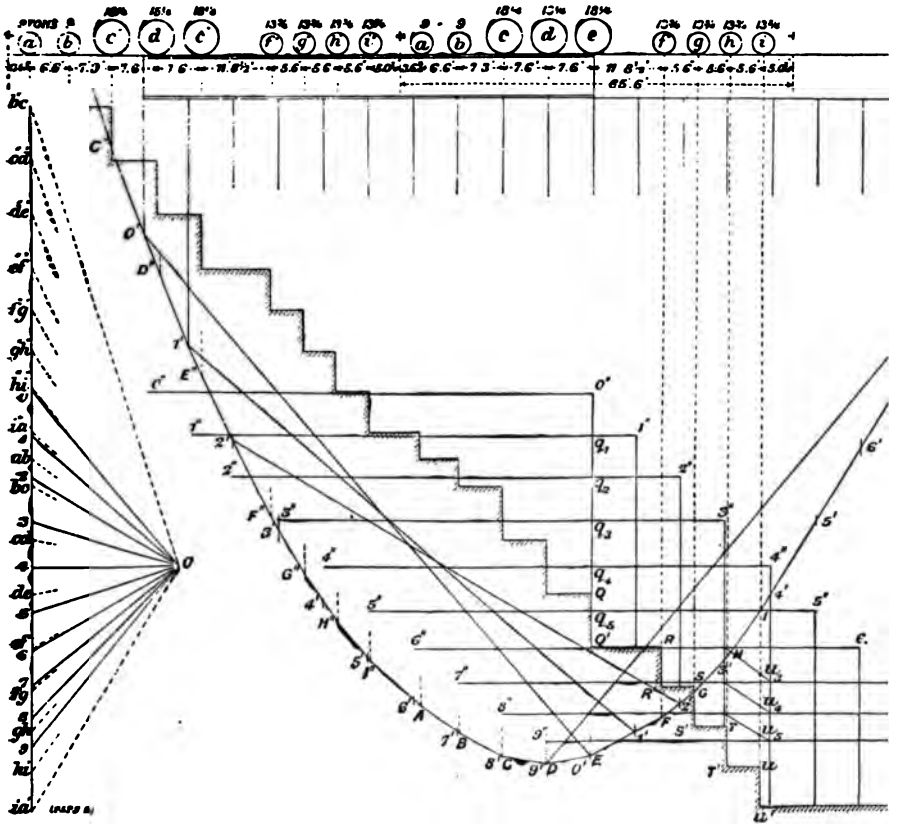
Proceeding in the same way to determine the maximum (negative) shears for half girder on the right, the girder is first placed with its right terminal er wheel e, Fig. 79, and then advanced towards the right through successive rvals of one-tenth span. In this way the shears under wheel e are first ıined, and then those under wheel i, the shears under wheel e at the right ıinal and at intervals of one-tenth span from it being given by o'' Q′, ′, q_2 Q′ . . . q_5 Q′, and those under wheel i by u_5 U′ at the centre, and by ″, u_3 U′ . . . at intervals of one-tenth span from it.

For the example worked out and illustrated in Figs. 78, 79 and 80, the ımum positive shears at the left terminal and at the distances from it of 0·2, 0·3, and 0·4 span, occur under wheel c, and are represented by

o'' N, n_1 N, n_2 N, n_3 N, and n_4 N respectively; at the centre, howev positive shear is a maximum when under wheel a, and is represented Fig. 78.

The maximum negative shears at the right terminal and at inte

Fig. 79.

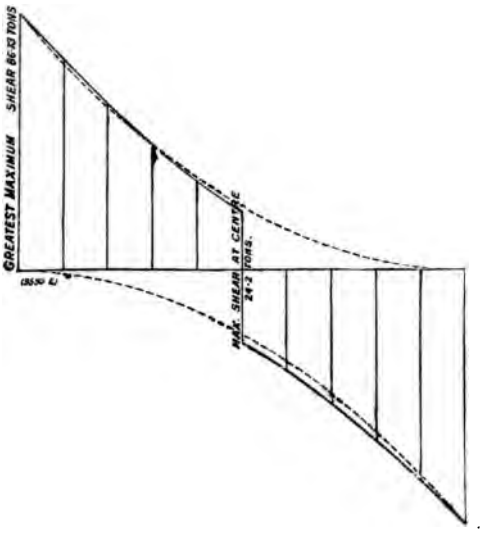


one-tenth the span from it are given by o'' Q′, q_1 Q′, q_2 Q′ (under e), u_3 U and u_5 U′ (under i).

The maximum shears having been thus determined for a number along the span, the diagram can be plotted as shown in Fig. 80.

Instead of advancing the girder through successive intervals of one-tenth
ı, as in the example given (or of one-twentieth span, where great accuracy
equired), an approximation to the true form of the diagram of maximum
ırs, and one which would be sufficiently accurate for the great majority of

Fig. 80.



s met with in practice, could be obtained by determining the maximum
ırs at the abutments, at a quarter span, and at the centre, and then erecting
nates representing the maximum shears at these points and joining their
emities by straight lines.

WHITTAKER'S BOOKS.

STEAM TURBINE ENGINEERING. By T. STEVENS, A.M.I.C.E., A.M and H. M. HOBART, M.I.E.E., Mem.A.I.E.E. Medium 8vo. W Illustrations. 21*s. net.*

This work gives the most **recent results** in practice, and a succinct account of the la of Steam Turbines. It contains **exhaustive comparisons** between **steam turbine a engine economies,** and from the results rational conclusions are formulated as to the cases in which these two types of prime movers should be employed. **Weights, cost number of wheels and blades,** and other **leading data** of the various types are con **tabular form.** More **complete details** than have been published before of many of **recent steam turbine Generating Stations** on both sides of the Atlantic are includ unique series of **comparative tables. Marine Steam Turbines** are similarly dealt **fuller information** than has before appeared is tabulated in form for the readiest referen

A RAILWAY TECHNICAL VOCABULARY. Comprising over 5,000 English, and American Technical Expressions relating to Railway Man Construction, and Working. By L. SERRAILLIER. 7*s.* 6*d.* net.

BRITISH LOCOMOTIVES: Their History, Construction, and Modern ment. By C. J. BOWEN COOKE, Assistant, London and North-Weste motive Department. With 150 Illustrations. 7*s.* 6*d.*

STRUCTURAL IRON AND STEEL. A Text-book for Architects, E Builders, and Students. By W. NOBLE TWELVETREES, M.I.M.E., Vice-I of C. and M.E. Society. With 234 Illustrations. 6*s.* net.

ELECTRIC TRACTION. A practical Handbook on the Application of El as a Locomotive Power. By J. H. RIDER, M.I.E.E., M.I.C.E., Chief E Engineer to the London County Council Tramways. With numero trations. 10*s.* 6*d.* net.

"As a concisely-worded record of contemporary practice it takes a high place."—*Electrician.*

"Has the advantage of being brought well down-to-date. The general principles . . . are adr clearly set out."—*Tramway and Railway World.*

A POCKET BOOK OF AERONAUTICS. By H. W. L. MOEDEBECK. lated from the German by Dr. W. MANSERGH VARLEY. With 150 Illus 10*s.* 6*d.* net.

LIGHTNING CONDUCTORS AND LIGHTNING GUARDS. A Tre the Protection of Buildings, of Telegraph Instruments and Submarin and of Electric Installations generally, from Damage by Atmospheric Di By Sir OLIVER J. LODGE, F.R.S., LL.D., D.Sc., M.I.E.E., Principal mingham University. With numerous Illustrations. 15*s.*

Catalogue of Books on Electricity, Engineering, &c., Post F

WHITTAKER & CO.,

2, WHITE HART STREET, PATERNOSTER SQUARE, LONDON, E.C.

WHITTAKER'S PRACTICAL HANDBOOKS.

THE INSPECTION OF RAILWAY MATERIAL. By G. R. BODMER, M.I.C.E. With numerous Illustrations. *5s.*

CONTENTS. Introduction—Rails, Ordinary and Tramway - Sleepers for Rail and Tramway —Fastenings—Tyres and Axles Plates, &c.—Rolling Stock - Billets and Blooms—Wire Rods and Wire—Index.

"It is a book we can thoroughly recommend as treating the practical, physical, and visual inspecting in a concise and admirable manner."—*Railway Engineer.*

AN ENGLISH RAILWAY. THE WORKING AND MANAGEMENT OF. By the late SIR GEORGE FINDLAY, Assoc.Inst.C.E., General Manager of the London and North-Western Railway. Sixth Edition. Revised and Enlarged. Appendix, and numerous Illustrations. *7s. 6d.*

STRESSES AND STRAINS: Their Calculation and that of their Resistances by Formulæ and Graphic Methods. By F. R. FARROW, F.R.I.B.A. With 100 Illustrations and Diagrams. *5s.* net.

MECHANICAL TABLES. Showing the Diameters and Circumferences from 1 inch to upwards of 20 feet in one-eighth inches, the Weight of a Lineal Foot of Rectangular Iron and of Round and Square Bar Iron of varying thickness and lengths, also Weights of Angle and Sheet Iron, and Weights and Strengths of Ropes and Chains. By J. FODEN. *1s. 6d.*

LAND SURVEYING AND LEVELLING. A Practical Handbook for Architects, Engineers, and Surveyors. By A. T. WALMISLEY, M.I.C.E., F.S.I., &c. With numerous Illustrations and Diagrams. *6s.* net.

FIELD WORK AND INSTRUMENTS. A Book for the use of Surveyors, Engineers, and Builders. By A. T. WALMISLEY, M.I.C.E. With 214 Illustrations. *5s.* net.

STEEL WORKS ANALYSIS. A Practical Handbook for Engineers and Metallurgists. By J. O. ARNOLD, Professor of Metallurgy, and F. INGHAM, Lecturer on Metallurgy, University of Sheffield. With 22 Illustrations and Diagrams. *10s. 6d.* net.

TRIGONOMETRY. For the use of Engineers, Architects, and Surveyors. By HENRY ADAMS, M.I.C.E., M.I.M.E., F.S.I. *2s. 6d.* net.

Catalogue of Books on Electricity, Engineering, &c., post free.

WHITTAKER & CO.,

2, WHITE HART STREET, PATERNOSTER SQUARE, LONDON, E.C.

UNIVERSITY OF MICHIGAN

WHITTAKER'S PRACTICAL HANDBOOKS.

IE INSPECTION OF RAILWAY MATERIAL. By G. R. BODMER, M.I.C.E. With numerous Illustrations. 5*s.*

CONTENTS.—Introduction—Rails, Ordinary and Tramway—Sleepers for Rail and Tramways —Fastenings—Tyres and Axles—Plates, &c.—Rolling Stock—Billets and Blooms—Wire Rods and Wire—Index.

"It is a book we can thoroughly recommend as treating the practical, physical, and visual inspecting, in a cise and admirable manner."—*Railway Engineer.*

N ENGLISH RAILWAY, THE WORKING AND MANAGEMENT OF. By the late SIR GEORGE FINDLAY, Assoc.Inst.C.E., General Manager of the London and North-Western Railway. Sixth Edition. Revised and Enlarged. Appendix, and numerous Illustrations. 7*s.* 6*d.*

'RESSES AND STRAINS: Their Calculation and that of their Resistances by Formulæ and Graphic Methods. By F. R. FARROW, F.R.I.B.A. With 100 Illustrations and Diagrams. 5*s.* net.

ECHANICAL TABLES. Showing the Diameters and Circumferences from 1 inch to upwards of 20 feet in one-eighth inches, the Weight of a Lineal Foot of Rectangular Iron and of Round and Square Bar Iron of varying thicknesses and lengths, also Weights of Angle and Sheet Iron, and Weights and Strengths of Ropes and Chains. By J. FODEN. 1*s.* 6*d.*

ND SURVEYING AND LEVELLING. A Practical Handbook for Architects, Engineers, and Surveyors. By A. T. WALMISLEY, M.I.C.E., F.S.I., &c. With numerous Illustrations and Diagrams. 6*s.* net.

ELD WORK AND INSTRUMENTS. A Book for the use of Surveyors, Engineers, and Builders. By A. T. WALMISLEY, M.I.C.E. With 214 Illustrations. 5*s.* net.

'EEL WORKS ANALYSIS. A Practical Handbook for Engineers and Metallurgists. By J. O. ARNOLD, Professor of Metallurgy, and F. IBBOTSON, Lecturer on Metallurgy, University of Sheffield. With 22 Illustrations and Diagrams. 10*s.* 6*d.* net.

IGONOMETRY. For the use of Engineers, Architects, and Surveyors. By HENRY ADAMS, M.I.C.E., M.I.M.E., F.S.I. 2*s.* 6*d.* net.

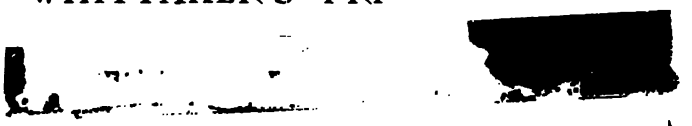
Catalogue of Books on Electricity, Engineering, &c., post free.

WHITTAKER & CO.,

2, WHITE HART STREET, PATERNOSTER SQUARE, LONDON, E.C.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
9015 02105 65

WHITTAKER'S PR.



UNIV. OF MICH.
AUG 19 1909

ENGIN. LIB.
TG
265
A77

A 758,044

Studien

über

das elastische Verhalten von Brückengewölben

einschliesslich

des Zusammenwirkens mit dem Aufbau

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ABD-EL-AZIZ EL-AROUSY
AUS KAIRO

Referent: Herr Prof. Dr. M. Ritter
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Stüssi

Zürich 1942 Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

PROPERTY OF
University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

PROPERTY OF
University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

Studien

über

ıs elastische Verhalten von Brückengewölben

einschliesslich

des Zusammenwirkens mit dem Aufbau

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ABD-EL-AZIZ EL-AROUSY
AUS **KAIRO**

Referent: Herr Prof. Dr. M. Ritter
Korreferent: Herr Prof. Dr. F. Stüssi

Zürich 1942 Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

Engin. Library
TG
205
.A77

MEINER MUTTER
UND DEM ANDENKEN MEINES VATERS
IN DANKBARKEIT GEWIDMET

EXCHANGE
BIBLIOTHEK
EIDG. TECH. HOCHSCHULE
ZURICH
1-28-47
JUN 14 1946

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit versucht der Verfasser die analytische Berechnung der Gewölbe für die praktische Anwendung weiter auszubilden und zu vereinfachen. Die Arbeit ist für den mit der Statik vertrauten Ingenieur bestimmt; und die zahlreichen Formeln und Tafeln sollen ihm bei seinen Berechnungen große Vereinfachungen einbringen.

In dieser Arbeit sind die Systemverformungen höheren Grades vernachlässigt. Die Untersuchungen sind somit im Bereiche der Elastizitätstheorie erster Ordnung ausgeführt, und die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes wird vorausgesetzt. Die Normal- und Querkräfte sind überall in Rechnung gezogen, sobald ihr Einfluß eine bedeutende Größe aufweist. Die Untersuchungen beschränken sich hier nicht auf bestimmte Annahmen der Bogenform und Bogenabmessungen, wie es häufig in der Literatur der Fall ist, sondern sie befassen sich mit fast allen praktischen Formen und Abmessungen sowie mit allen Einspannungsgraden der Bogen.

Die Arbeit schließt sich bezüglich der Bezeichnungen an die Vorlesungen und literarischen Arbeiten von Prof. Dr. M. Ritter an. Die mathematischen Entwicklungen wurden kurz gefaßt, und es ist auf die Wiedergabe zahlreicher Zwischenrechnungen absichtlich verzichtet worden, um den Umfang der Arbeit so weit als möglich zu kürzen.

An dieser Stelle möchte ich meinen verehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. M. Ritter und Herrn Prof. Dr. F. Stüssi, für ihre große Hilfe und Unterstützung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Zürich, im Februar 1941.

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Teil: Formänderungen des freien Bogens.

A. Einleitung 11

B. Vorberechnungen der Biegungslinie des elastisch eingespannten Bogens
1. Annahmen der Bogenform und Bogenabmessungen . . 12
2. Das Grundsystem und die Elastizitätsgleichungen . . . 13
3. Einflußlinien der Festpunktmomente und des Horizontalschubes 15
4. Die Faktoren „μ“, „μ_ε“ und „μ_ψ“ 19
5. Erster Grenzfall: der voll eingespannte Bogen 20
6. Zweiter Grenzfall: der Zweigelenkbogen 29

C. Die Biegungslinie unter Verkehrslast:
1. Einzellast an beliebiger Stelle 30
2. Einzellast im Scheitel 38
3. Einzellast im Viertel 43
4. Gleichmäßig verteilte Belastung 44

D. Die Scheitelsenkung
1. Unter Einzellast an beliebiger Stelle 45
2. Unter Einzellast im Scheitel 46
3. Unter gleichmäßig verteilter Belastung 54
4. Unter Eigengewicht 55

E. Die Biegungslinie infolge Temperaturänderung und Schwinden
1. Die entstehenden Kräfte 59
2. Die Gleichungen der Biegungslinie und der Scheitelsenkung 60

F. Die Biegungslinie infolge Widerlagerbewegungen
1. Einleitung 63
2. Allgemeiner Ausdruck für die auftretenden Momente und Kräfte 63
3. Der Einfluß einer Widerlagerdrehung 65
4. Der Einfluß einer horizontalen Verschiebung 69
5. Der Einfluß einer Widerlagereinsenkung 70

G. Der Einfluß der Faktoren c und n auf die Formänderungen . . 71

II. Teil: **Zusammenwirken von Bogen und Aufbau.**

Seite

A. Einleitung 75

B. Das Zusammenwirken bei Verkehrslast 76
1. Die erste Berechnungsmethode 76
2. Die zweite Berechnungsmethode 80
3. Die dritte Berechnungsmethode (eine Näherungsmethode) . 87
4. Neue vierte Berechnungsmethode 94
5. Einfluß der Elastizität der Stützen 98
6. Einfluß der Anzahl der Stützen 106
7. Einfluß der Laststellung 115
8. Einfluß des Faktors „n“ 121
9. Einfluß des Einspannungsgrades 122
10. Einfluß des Faktors „c“ 122

C. Das Zusammenwirken bei Temperaturänderung 123
1. Bei den Brücken mit wenigen Stützen
a) Die Elastizitätsgleichungen nach der ersten Methode . 123
b) Die Elastizitätsgleichungen nach der neuen Methode . 127
2. Bei den Brücken mit vielen Stützen
a) Einleitung 127
b) Das Grundsystem und die Momentengleichungen im Bogen und im Balken 127
c) Formeln für die Momente im Bogen und im Balken in den Schnitten beim Scheitel, Viertel und Kämpfer . . . 128
d) Zahlenbeispiel 129

D. Das Zusammenwirken bei horizontaler Verschiebung der Widerlager 130

E. Zusammenfassung 130

Verzeichnis der Tafeln

			Seite
Tafel	I	Zur Ermittlung der Festpunktmomente (Bogen oder Balken)	17
Tafel	II	Zur Ermittlung der Höhe der starren Scheiben (voll eing. Bogen)	21
Tafel	III	Zur Ermittlung des Ausdruckes „λ“ (voll eing. Bogen)	23
Tafel	IV	Zur Ermittlung des Horizontalschubes infolge Scheitellast (voll eing. Bogen)	25
Tafel	V	Zur Ermittlung des Ausdruckes „λ“ und des Horizontalschubes infolge Scheitellast (Zweigelenkbogen)	27
Tafel	VI	Die Momentenflächen beim voll eing. Bogen	31
Tafel	VII	Die Biegungslinien des voll eing. Bogens	33
Tafel	VIII	Die Momentenflächen beim Zweigelenkbogen	39
Tafel	IX	Die Biegungslinien des Zweigelenkbogens	41
Tafel	X	Zur Ermittlung der Scheitelsenkung infolge einer Last P im Scheitel (voll eing. Bogen)	47
Tafel	XI	Biegungslinien infolge Temperaturänderung und Einflußlinien des Horizontalschubes (eing. Bogen und Zweigelenkbogen)	61
Tafel	XII	Die Biegungslinien infolge Drehung und Senkung eines Widerlagers (voll eing. Bogen)	67
Tafel	XIII	Die Umhüllungskurven der Biegungslinien unter einer beweglichen Last $P = 1$ (voll eing. Bogen und Zweigelenkbogen)	117
Tafel	XIV	Einfluß von „n“ auf die Umhüllungskurven der Biegungslinien (voll eing. Bogen)	119

I. TEIL

Formänderungen des freien Bogens

A. Einleitung

Die Bestimmung des elastischen Verhaltens eines Bauwerkes ist bei der Durchführung einer statischen Berechnung, um ein richtiges Urteil über die Güte des vollendeten Baues zu gewinnen, sehr zu empfehlen.

Durch die Kenntnis des elastischen Verhaltens des Haupttragelementes eines Baues kann man den Einfluß der Deformationen dieses Elementes auf die anschließenden Bauteile bestimmen, sowie die Wirkung der letzteren auf das Hauptelement selbst. Diese gegenseitige Wirkung der Bauteile untereinander darf bei den genaueren Berechnungen nicht vernachlässigt werden. Als Beispiel finden wir bei den Bogenbrücken, daß die Bogendeformationen großen Einfluß auf die Fahrbahn ausüben, obgleich sie im Verhältnis zu denjenigen anderer Tragsysteme sehr klein sind.

Das elastische Verhalten eines Baues nach seiner Vollendung gibt uns Anhaltspunkte über die Güte seiner Baumaterialien und die Sorgfalt der Verarbeitung. Deshalb wird kaum ein Bauwerk von Bedeutung in Betrieb gegeben, ohne daß man sein elastisches Verhalten durch Probebelastungen prüft. Die Deformationen des Baues werden zum voraus rechnerisch ermittelt, und zwar unter ausreichender Beachtung der Auflagerverhältnisse. Die beobachteten Deformationen dürfen die berechneten keinesfalls überschreiten [1]), sonst bedeutet die Überschreitung das Vorhandensein eines Fehlers in der vorausgesetzten statischen Wirkung des Baues, eine mangelhafte Verarbeitung oder eine unzulängliche Güte der Baumaterialien.

In dem vorliegenden ersten Teil werden die Biegungslinien des Bogens unter verschiedenen Lasten analytisch ermittelt. Wir behandeln den elastisch eingespannten Bogen ohne Scheitelgelenk.

---

[1]) Siehe Art. 126 der schweiz. Normen 1935.

B. Vorberechnungen der Biegungslinie [2])

1. Annahmen der Bogenform und Bogenabmessungen

Die Bogenachse ist als eine *Parabel vierter Ordnung* anzunehmen. Die Gleichung dieser Kurve, bezogen auf die Kämpferwaagrechte (Abb. 1), lautet:

$$y' = f\left(1 - c'\frac{z^2}{L_1^2} - c\frac{z^4}{L_1^4}\right) \tag{1}$$

wobei $c' = 1 - c$, und c eine Konstante ist.

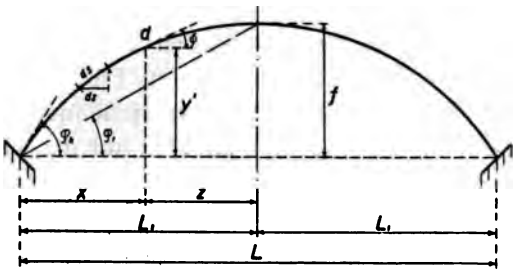


Abb. 1

Für den Verlauf des Trägheitsmoments J längs der Bogenachse benützt man das einfache und praktische *Potenzgesetz:*

$$\frac{1}{J\cos\varphi} = \frac{1}{J_s}\left[1 - (1-n)\frac{z^2}{L_1^2}\right] \tag{2}$$

Dabei ist:

$n = \dfrac{J_s}{J_k \cos\varphi_k}$

J_s = Trägheitsmoment des Bogens am Scheitel.

J_k, φ_k = Trägheitsmoment bzw. Neigungswinkel der Bogenachse am Kämpfer.

---

[2]) Diese Vorberechnungen stammen hauptsächlich von Prof. Dr. M. Ritter, siehe:

1. Analytische Berechnung gelenkloser Brückengewölbe: Denkschrift der E. T. H. Zürich 1937.
2. Beiträge zur Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk, 1909.

Sie sind die Grundlage vorliegender Arbeit und bieten uns hier eine nötige Einführung derselben.

Mit $m = 1 - n$ wird:

$$dw = \frac{ds}{EJ} = \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = \frac{dz}{EJ_s}\left(1 - m \frac{z^2}{L_1^2}\right) \tag{3}$$

Der Faktor c variiert in den praktischen Fällen von 0 (die gewöhnliche Parabel) bis etwa 0,40. Für die anderen Formen der Bogenachse (z. B. Parabel sechster und höherer Ordnung) wird man den Faktor c suchen, der die nächstliegende Parabel vierter Ordnung zu der gegebenen Achse liefert [3]). Der Faktor n eines gegebenen Bogens, dessen Verhältnisse vom Potenzgesetz abweichen, kann näherungsweise ermittelt werden, indem man aus Formel (2) die Werte n_1, n_2, etc. für eine Reihe geeigneter Schnitte rechnet und das Mittel nimmt.

2. Das Grundsystem und die Elastizitätsgleichungen

Wir nehmen den einfachen Balken mit den starren Scheiben als Grundsystem an (vergl. Abb. 2). Das Biegungsmoment in irgend einem Punkt d wird:

$$M = M_0 + M_1 \frac{x'}{L} + M_2 \frac{x}{L} - H \cdot y \tag{4}$$

Die drei Unbekannten in dieser Formel sind durch die drei Elastizitätsbedingungen [4]) bestimmt:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\varepsilon_1 M_1' \quad [5]) \\ \beta &= -\varepsilon_2 M_2' \quad [5]) \\ \delta &= \alpha t_1 + \beta t_2 - H \psi \quad [5]) \end{aligned} \tag{5}$$

---

[3]) Siehe Methode von Prof. Ritter: Denkschrift der E. T. H. 1937.

[4]) Es ist zu beachten, daß die gewählten Elastizitätsbedingungen nicht die allgemeinst mögliche Form darstellen.

[5]) α, β sind die Drehungswinkel des linken bzw. des rechten Kämpfers, ε_1, ε_2 sind die Einspannungsmaße beider Kämpfer.

ψ ist das Maß der Ausdehnbarkeit der Öffnung L. Bei sehr fest gelagerten Kämpfern ist $\psi = 0$, bei einem Bogen mit Zugband ist $\psi = L/EF$, wobei E und F sich auf das Zugband beziehen.

worin

$$M_1' = M_1 + H t_1 \qquad \text{und} \qquad M_2' = M_2 + H t_2$$

Man verfügt über die Höhen der starren Scheiben t_1 und t_2 in der Weise, daß

$$\alpha_3 + \varepsilon_1 t_1 = 0, \qquad \text{und} \qquad \beta_3 + \varepsilon_2 t_2 = 0 \ ^{6}) \tag{6}$$

und gelangt somit zu den einfachen Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + M_1(\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \alpha_2 &= 0 \ ^{6}) \\ \beta_0 + M_1 \beta_1 + M_2(\beta_2 + \varepsilon_2) &= 0 \ ^{6}) \\ \delta_0 + H(\delta_3 + \varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2 + \psi) &= 0 \ ^{6}) \end{aligned} \tag{7}$$

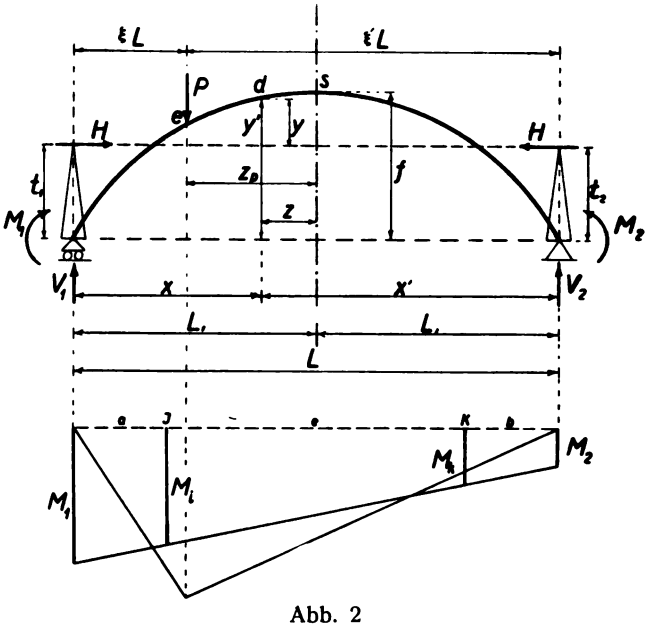


Abb. 2

---

[6]) Bekanntlich bedeuten α_1 und β_1 die Drehungen des linken bzw. rechten Kämpfers allein infolge $M_1 = 1$; α_2, β_2 die Drehungen allein infolge $M_2 = 1$; und α_3, β_3 die Drehungen allein infolge $H = 1$.

3. Einflußlinien der Festpunktmomente und des Horizontalschubes

Nach dem Verfahren von *Bresse* ergibt sich unter Annahme des Potenzgesetzes:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{6+4n}{5} \cdot \frac{L}{6EJ_s}$$
$$\alpha_2 = \beta_1 = \frac{4+n}{5} \cdot \frac{L}{6EJ_s} \tag{8}$$

Für den symmetrischen Bogen erhalten wir somit für die Festpunkte ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$):

$$a = b = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon} L = \frac{4+n}{2+n+\frac{6EJ_s\varepsilon}{L}} \cdot \frac{L}{5} \tag{9}$$

Die Festpunktmomente M_i und M_k, die infolge einer Last P (Abb. 2) entstehen, ergeben sich aus der Theorie des eingespannten Balkens wie folgt:

$$M_i = -aP\left[\xi' \cdot \xi(1+\xi') + \frac{2m}{5-m}\xi\xi'^3(3\xi-1)\right] = -aPr_i$$
$$M_k = -bP\left[\xi \cdot \xi'(1+\xi) + \frac{2m}{5-m}\xi'\xi^3(3\xi'-1)\right] = -bPr_k \tag{10}$$

Die graphische Darstellung obiger Gleichungen gibt uns die Einflußlinie in der Tafel I. Die Momente M_1 und M_2 haben mit M_i und M_k folgende, aus der Geometrie der Figur stammende Beziehung:

$$M_1 = M_i\frac{L-b}{e} - M_k\frac{a}{e} = -PL \cdot r_1$$
$$M_2 = M_k\frac{L-a}{e} - M_i\frac{b}{e} = -PL \cdot r_2 \tag{11}$$

wobei $e = L - a - b$,

und

$$r_1 = \frac{a}{L}\left[r_i\frac{L-b}{e} - r_k\frac{b}{e}\right]$$
$$r_2 = \frac{b}{L}\left[r_k\frac{L-a}{e} - r_i\frac{a}{e}\right] \tag{12}$$

Wir führen die folgenden Ausdrücke ein:

$$c_0 = \frac{t}{f} \qquad \text{und} \qquad c_0' = 1 - c_0$$

Damit läßt sich Gleichung (1) in folgender Weise schreiben:

$$y = y' - t = f\left(c_0' - c' \frac{z^2}{L_1^2} - c \frac{z^4}{L_1^4}\right) \tag{13}$$

Wir benützen die Arbeitsgleichung, um α_3 auszurechnen:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\int \frac{x'}{L} y \, dw \\
&= -\int \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{L_1}\right) \cdot f\left(c_0' - c' \frac{z^2}{L_1^2} - c \frac{z^4}{L_1^4}\right) \cdot \left(1 - m \frac{z^2}{L_1^2}\right) \frac{dz}{EJ_s} \\
&= -\frac{f L}{2 E J_s}\left[\left(c_0' - \frac{c'}{3} - \frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{c_0'}{3} - \frac{c'}{5} - \frac{c}{7}\right)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (6) ein, so ergibt sich

$$c_0 = \frac{\left(1 - \frac{c'}{3} - \frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{1}{3} - \frac{c'}{5} - \frac{c}{7}\right)}{1 - \frac{m}{3} + 2\frac{E J_s \varepsilon}{L}} \tag{15}$$

und somit ist t bestimmt.

Aus Gleichung (7) erhält man nach der Arbeitsgleichung:

$$\left.\begin{aligned}
H &= \frac{\int M_0 y \, dw}{\int y^2 \, dw + \int \frac{ds}{EF} + 2\varepsilon t^2 + \psi} \quad ^{7}) \\
&= \frac{\int M_0 y \, dw}{\int y^2 \, dw} \cdot \frac{1}{1 + \mu + \mu_\varepsilon + \mu_\psi}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Dabei ist:

$$\mu = \frac{\int \frac{ds}{EF}}{\int y^2 \, dw}, \qquad \mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon t^2}{\int y^2 \, dw}, \quad \text{und} \quad \mu_\psi = \frac{\psi}{\int y^2 \, dw}$$

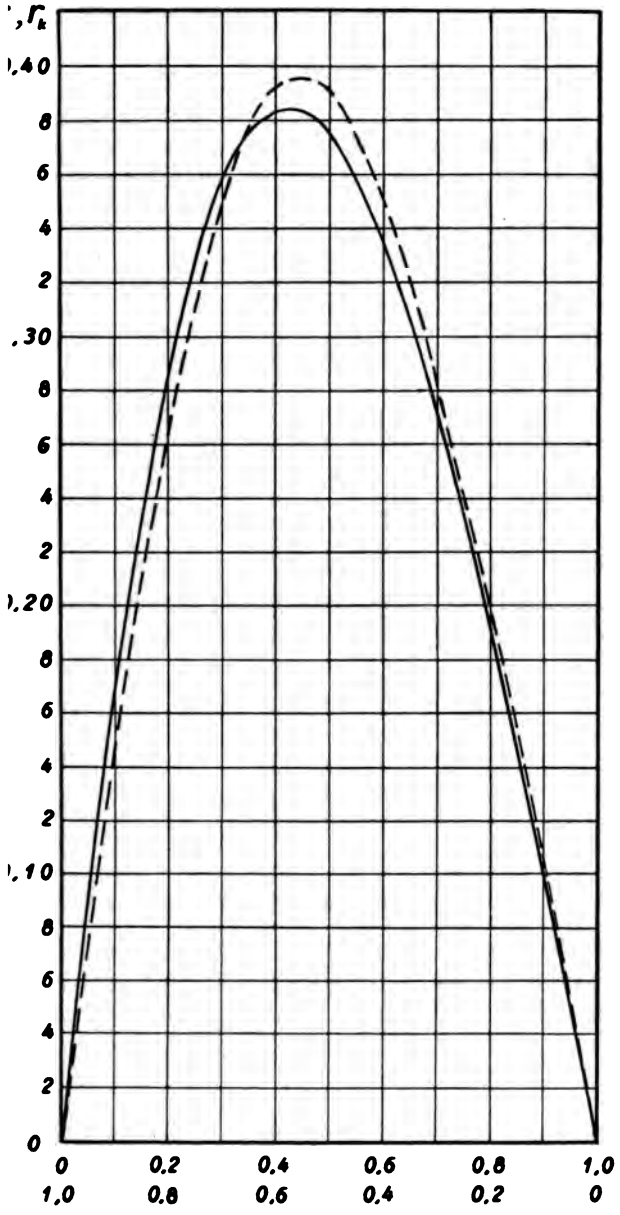
Nach Gleichung (13) wird:

$$\int y^2 \, dw = \int_{z=-L_1}^{z=L_1} f^2 \left(c_0' - c' \frac{z^2}{L_1^2} - c \frac{z^4}{L_1^4}\right)^2 \left(1 - m \frac{z^2}{L_1^2}\right) \frac{dz}{EJ_s} = \frac{f^2 L}{\lambda E J_s} \tag{17}$$

---

[7]) Die Ausdrücke für die Normal- und Querkräfte sind hier nur im Zähler vernachlässigt.

fel I. Zur Ermittlung der Festpunktmomente (Bogen oder Balken).



$$M_i = -aP \cdot r_i$$

$$M_k = -bP \cdot r_k$$

— Für Balken mit $\bar{J}$ konstant oder Bogen mit $n = 1$

--- Für Bogen mit $n = 0$

$$\text{worin} \quad \frac{1}{\lambda} = c_0'^2\left(1-\frac{m}{3}\right) - 2c_0'\left[\left(\frac{c'}{3}+\frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{c'}{5}+\frac{c}{7}\right)\right]$$
$$+ \left[\left(\frac{c'^2}{5}+\frac{2c'c}{7}+\frac{c^2}{9}\right) - m\left(\frac{c'^2}{7}+\frac{2c'c}{9}+\frac{c^2}{11}\right)\right] \qquad (18)$$

Die *Einflußlinie des Horizontalschubes* [8]) läßt sich, mit Anwendung des Satzes von Maxwell, als Biegungslinie leicht gewinnen:

$$H = k_\mu \cdot \frac{PL}{4f} \qquad (19)$$

worin

$$k_\mu = \frac{\lambda_\mu}{2}\left[c_0'(1-\varkappa^2) - \frac{c'+mc_0'}{6}(1-\varkappa^4) - \frac{c-mc'}{15}(1-\varkappa^6) + \frac{mc}{28}(1-\varkappa^8)\right] \qquad (20)$$

Darin haben wir die Ausdrücke eingeführt:

$$\varkappa = \frac{z_P}{L_1}, \quad k_\mu = k \cdot \frac{1}{1+\mu+\mu_\varepsilon+\mu_\psi}, \quad \text{und} \quad \lambda_\mu = \lambda \cdot \frac{1}{1+\mu+\mu_\varepsilon+\mu_\psi} \qquad (21)$$

Unter einer *gleichmäßig verteilten Belastung* p t/m läßt sich H bestimmen, indem man die H-Einflußfläche durch Integration der Gleichung der Einflußlinie berechnet. Es ergibt sich:

$$H = k_\mu' \cdot \frac{pL^2}{8f} \qquad (22)$$

worin

$$k_\mu' = 2\lambda_\mu\left(\frac{c_0'}{3} - \frac{c'+mc_0'}{15} - \frac{c-mc'}{35} + \frac{mc}{63}\right) \qquad (23)$$

4. Die Faktoren μ, μ_ε und μ_ψ

Um ein Bild des Wertes von μ zu erhalten, geht man von der meistens zutreffenden Annahme aus, daß $F\cos\varphi$ = konst. = F_s. Aus den Gleichungen (16) und (17) erhält man:

$$\mu \mathrel{\widehat{=}} \lambda\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \qquad (24)$$

wobei i_s der Trägheitsradius des Scheitelquerschnittes bedeutet.

---

[8]) Tafel XI stellt das Bild dieser Einflußlinie dar.

$\frac{i_s}{f}$ ist sehr klein, somit ist $\left(\frac{i_s}{f}\right)^2$ noch viel kleiner, und daraus ergibt sich, daß μ eine sehr kleine Zahl sein muß. Nur bei sehr flachen Bogen überschreitet μ den Wert von 0,01. Deswegen ist es in manchen Fällen gestattet, μ zu vernachlässigen, jedoch nicht bei den Berechnungen für Eigengewicht.

Anders ist der Fall mit μ_ε. Gleichung (16) gibt

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\,\varepsilon\,t^2}{\int y^2\,dw}$$

Im Fall des volleingespannten Bogens wird μ_ε gleich Null mit ε. Auch noch beim Zweigelenkbogen, wo $\varepsilon = \infty$, ist μ_ε gleich Null, denn mit $\varepsilon = \infty$ wird t nach Gleichung (15) gleich Null, und aus Gleichung (6) wird:

$$2\,\varepsilon\,t^2 = 2 \cdot \varepsilon t \cdot t = 2\,(-\alpha_3) \cdot 0 = 0$$

Für alle anderen Werte von ε zwischen 0 und ∞ ist μ_ε von Null verschieden. Es ist somit interessant zu wissen, wie groß das Maximum von μ_ε ist. Deshalb differenzieren wir μ_ε nach ε und setzen das Resultat gleich Null. Für $c = 0$ und $n = 1$ erhalten wir nach diesem Verfahren

$$\mu_\varepsilon \text{ max.} = 0{,}727 \quad \text{bei} \quad \varepsilon = \frac{L}{\sqrt{24\,EJ_s}}$$

Dieser Wert ist bedeutend; H ändert sich somit wesentlich, deshalb darf man außer den zwei extremen Fällen von Zweigelenkbogen und voll eingespannten Bogen μ_ε nicht vernachlässigen.

Der *dritte Faktor* μ_ψ ist hauptsächlich für den Bogen mit Zugband bestimmt. Sein Wert ist von Fall zu Fall zu berechnen; er hängt von den Dimensionen des Zugbandes ab..

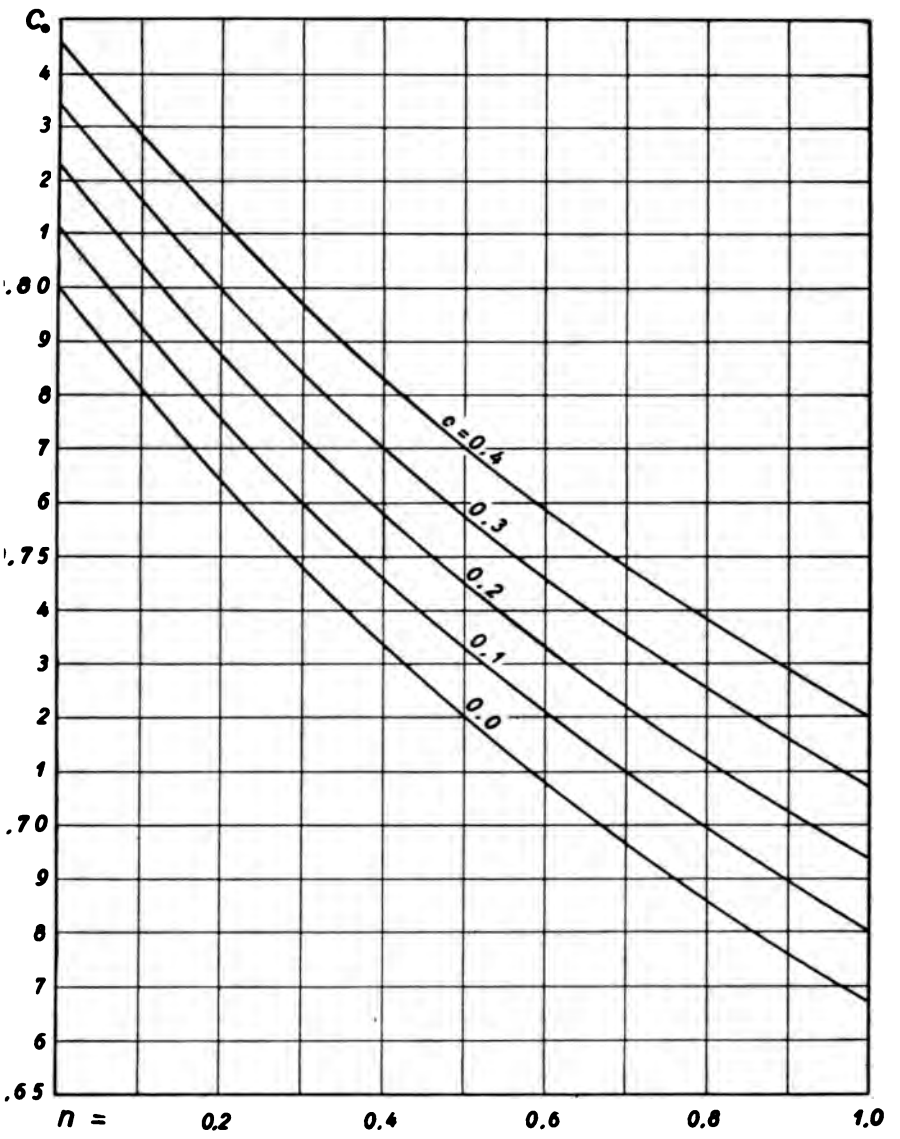
5. Erster Grenzfall: Der voll eingespannte Bogen

Hier sind die Winkel α, β und ε, sowie die Größe ψ, gleich Null. Wir erhalten folgende Vereinfachungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + M_1\,\alpha_1 + M_2\,\alpha_2 &= 0 \\ \beta_0 + M_1\,\beta_1 + M_2\,\beta_2 &= 0 \\ \delta_0 + H \cdot \delta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

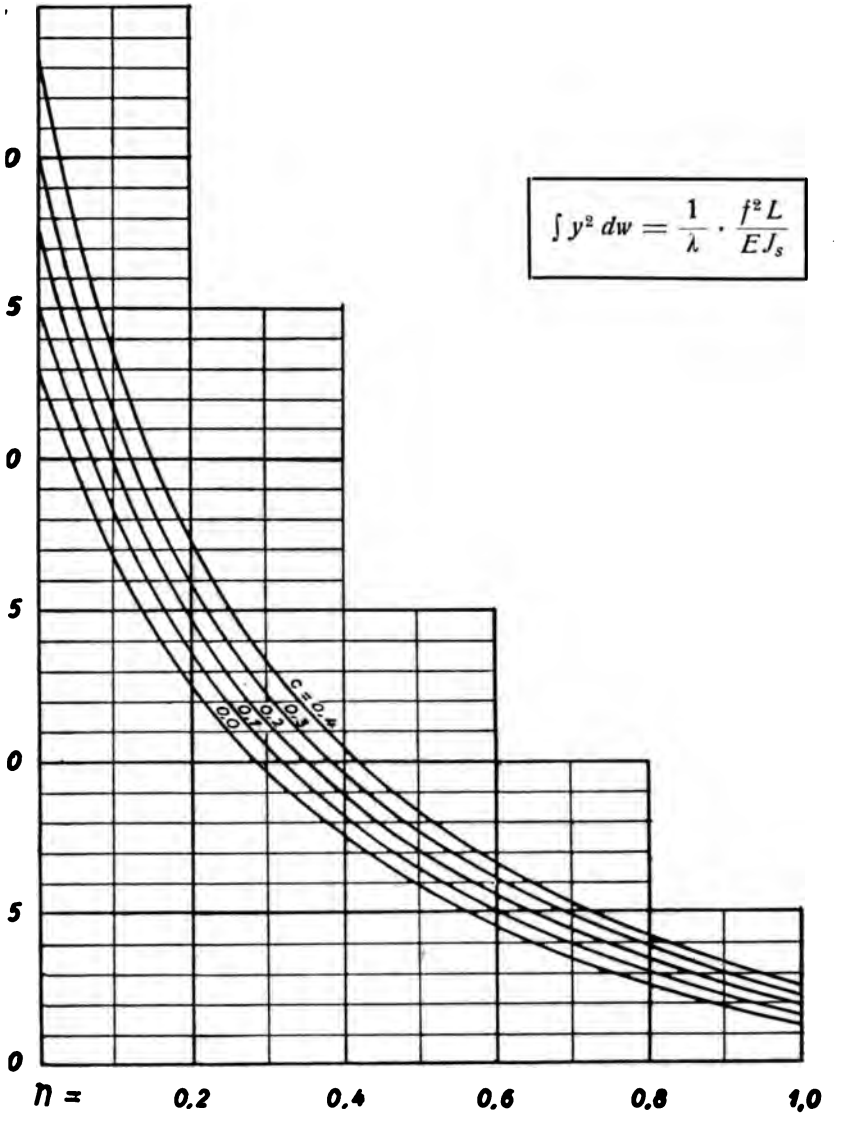
Tafel II.

Zur Ermittlung der Höhe der starren Scheiben des voll eingespannten Bogens. $t = c_0 \cdot f$



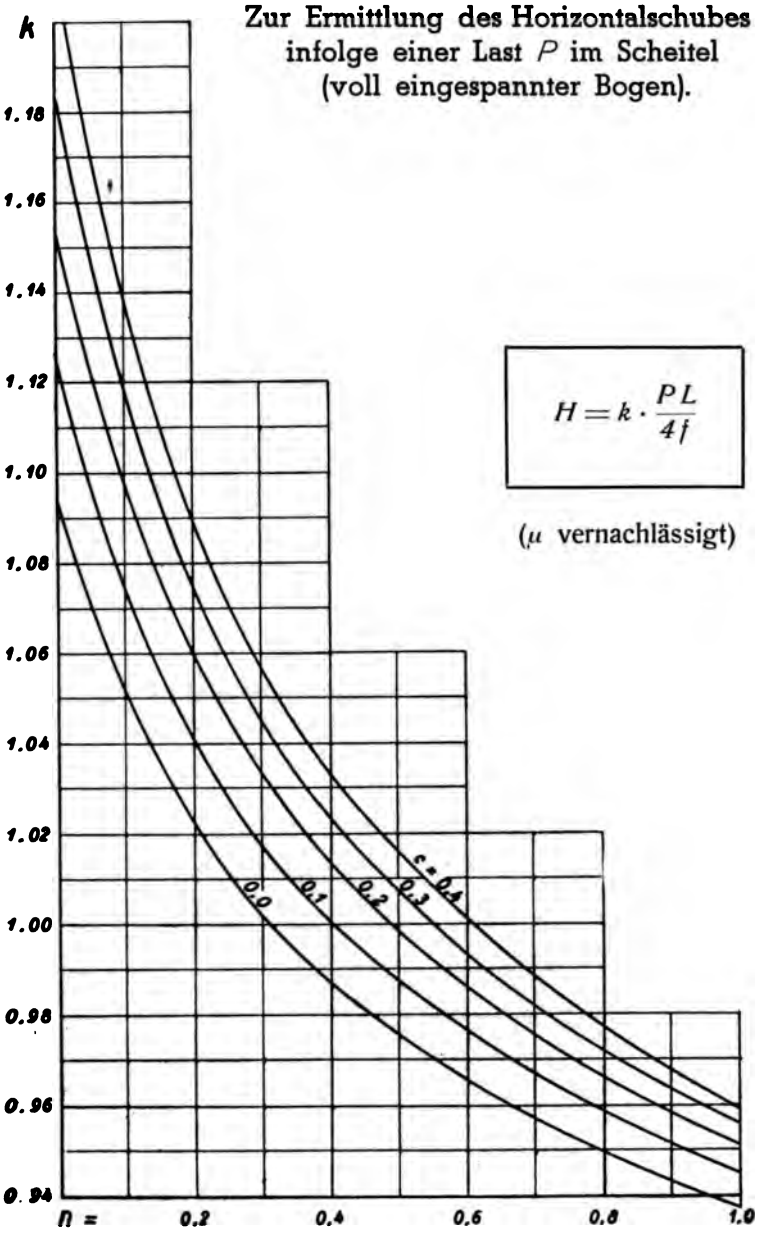
Tafel III.

ur Ermittlung des Ausdruckes λ beim voll eingespannten Bogen.



Tafel IV.

Zur Ermittlung des Horizontalschubes infolge einer Last P im Scheitel (voll eingespannter Bogen).

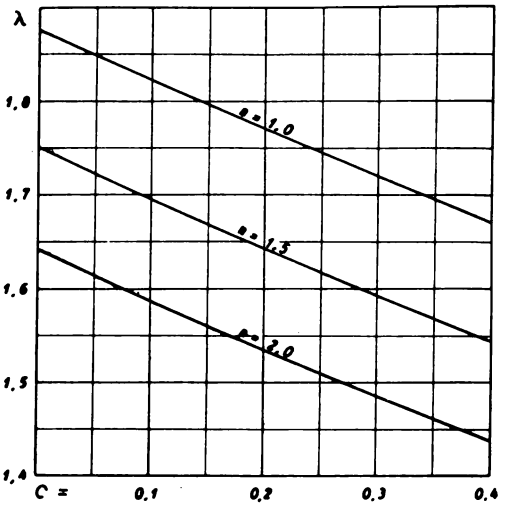


$$H = k \cdot \frac{PL}{4f}$$

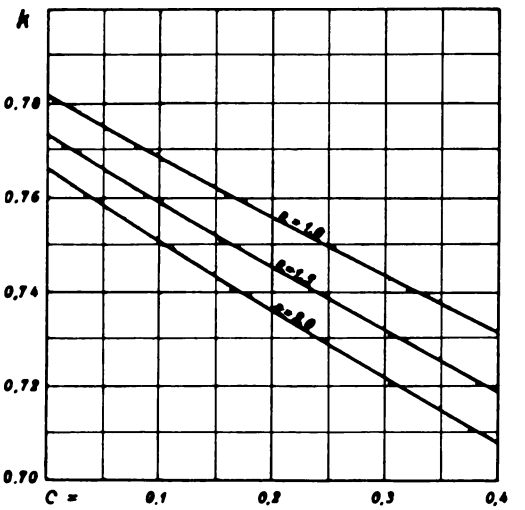
(μ vernachlässigt)

Tafel V.
(Für den Zweigelenkbogen).

Der Ausdruck «λ»



Der Horizontalschub infolge einer Last P im Scheitel.



$$H = k\frac{PL}{4f}$$

$$a = b = \frac{4+n}{5(2+n)} \cdot L \tag{26}$$

Die Größe t hat hier ein Maximum für:

$$c_0 = \frac{\left(1 - \frac{c'}{3} - \frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{1}{3} - \frac{c'}{5} - \frac{c}{7}\right)}{1 - \frac{m}{3}} \tag{27}$$

ler

$$c_0' = 1 - c_0 = \frac{\left(\frac{c'}{3} + \frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{c'}{5} + \frac{c}{7}\right)}{1 - \frac{m}{3}} \tag{27'}$$

Zweiter Grenzfall: Der Zweigelenkbogen

Hier ist $\varepsilon = \infty$, $a = b = 0$ und $M_1 = M_2 = 0$. Die starren heiben verschwinden und H greift in der Kämpferlinie an. Die leichung für die Schnittmomente reduziert sich zu:

$$M = M_0 - H\,y'$$

ie Gleichung für λ nimmt folgende Form an:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1 - \frac{m}{3}\right) - 2\left[\left(\frac{c'}{3} + \frac{c}{5}\right) - m\left(\frac{c'}{5} + \frac{c}{7}\right)\right] + \left[\left(\frac{c'^2}{5} + \frac{2\,c'c}{7} + \frac{c^2}{9}\right) - m\left(\frac{c'^2}{7} + \frac{2\,c'c}{9} + \frac{c^2}{11}\right)\right] \tag{28}$$

ıch vereinfachen sich die k-Gleichungen:

$$= \frac{\lambda_\mu}{2}\left[(1-\varkappa^2) - \frac{c'+m}{6}(1-\varkappa^4) - \frac{c-mc'}{15}(1-\varkappa^6) + \frac{mc}{28}(1-\varkappa^8)\right] \tag{29}$$

ıd

$$= 2\,\lambda_\mu\left(\frac{1}{3} - \frac{c'+m}{15} - \frac{c-mc'}{35} + \frac{mc}{63}\right) \tag{30}$$

Die Tafeln II, III und V ermöglichen eine rasche Bestimmung r Größen t und λ.

C. Die Biegungslinie unter Verkehrslast

1. Einzellast an beliebiger Stelle

a) Für den elastisch eingespannten Bogen

Es handelt sich um eine Einzellast in irgend einem Punkte (Abb. 2), und wir wollen die entstehende Biegungslinie ermitteln.

Aus Gleichung (4) erhalten wir:

Für den Teil des Bogens links der Last.

$$M_{links} = \frac{PL}{2}\left[\xi'\left(1-\frac{z}{L_1}\right)-r_1\left(1+\frac{z}{L_1}\right)-r_2\left(1-\frac{z}{L_1}\right)-\frac{1}{2}k_\mu\left(c_0'-c'\frac{z^2}{L_1^2}-c\frac{z^4}{L_1^4}\right)\right]$$

Die Differentialgleichung der Biegungslinie lautet:

$$\frac{d^2\delta}{dz^2} = -\frac{M}{EJ\cos\varphi} = -\frac{M}{EJ_s}\left(1-m\frac{z^2}{L_1^2}\right)$$

und somit wird

$$\frac{d^2\delta}{dz^2} = -\frac{PL}{2EJ_s}\left[\xi'\left(1-\frac{z}{L_1}\right)-r_1\left(1+\frac{z}{L_1}\right)-r_2\left(1-\frac{z}{L_1}\right)-\frac{1}{2}k_\mu\left(c_0'-c'\frac{z^2}{L_1^2}-c\frac{z^4}{L_1^4}\right)\right]\left[1+\right.$$

Wir integrieren und bekommen

$$\frac{d\delta}{dz} = -\frac{PL}{2EJ_s}\left[\left(\xi'-r_1-r_2-\frac{c_0'}{2}k_\mu\right)z-\frac{1}{2}(\xi'+r_1-r_2)\frac{z^2}{L_1}+\frac{1}{6}c'\cdot k_\mu\cdot\frac{z^3}{L_1^3}\right.$$
$$+\frac{1}{10}ck_\mu\frac{z^5}{L_1^4}-\frac{m}{3}\left(\xi'-r_1-r_2-\frac{c_0'}{2}k_\mu\right)\frac{z^3}{L_1^2}+\frac{m}{4}(\xi'+r_1-r_2)\frac{z^4}{L_1^3}$$
$$\left.-\frac{1}{10}mc'k_\mu\frac{z^5}{L_1^4}-\frac{1}{14}mck_\mu\frac{z^7}{L_1^6}-C_1L_1\right]$$

Der Wert von C_1 ergibt sich aus der Randbedingung

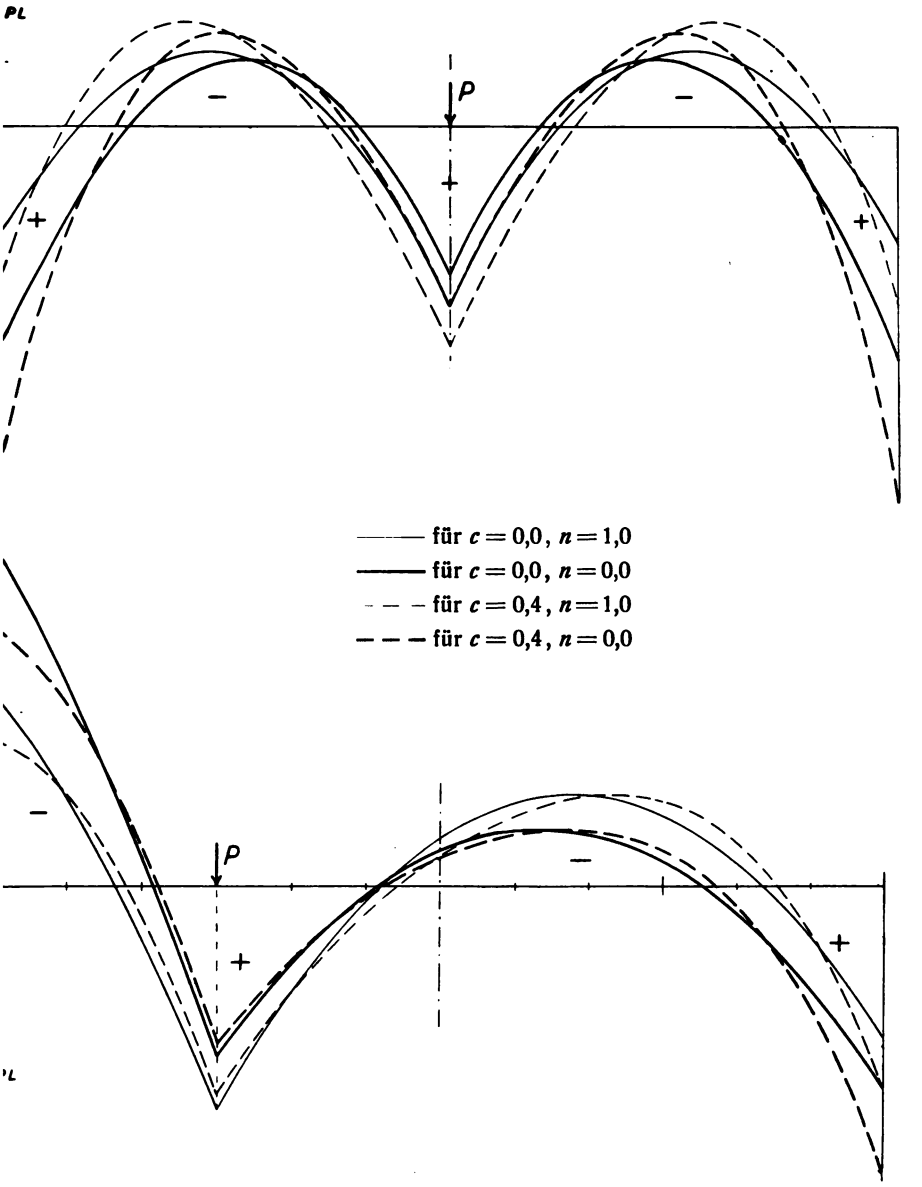
$$\left(\frac{d\delta}{dz}\right)_{z=L_1} = \varepsilon M_1'.$$

Wir erhalten:

$$C_{1\,links} = \frac{-EJ_s\varepsilon}{L}(4r_1-c_0k_\mu)+\frac{1}{2}(\xi'-3r_1-r_2)-\frac{m}{12}(\xi'-7r_1-r_2)$$
$$-\frac{1}{2}k_\mu\left[\left(c_0'-\frac{c'}{3}-\frac{c}{5}\right)-m\left(\frac{c_0'}{3}-\frac{c'}{5}-\frac{c}{7}\right)\right] \qquad (32_l)$$

Tafel VI.

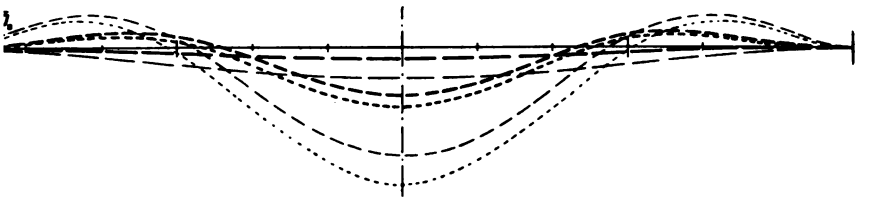
Die Momentenflächen beim voll eingespannten Bogen.



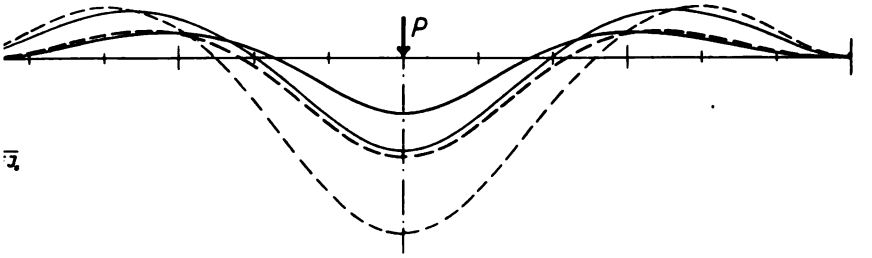
Tafel VII.

Die Biegungslinien des voll eingespannten Bogens.

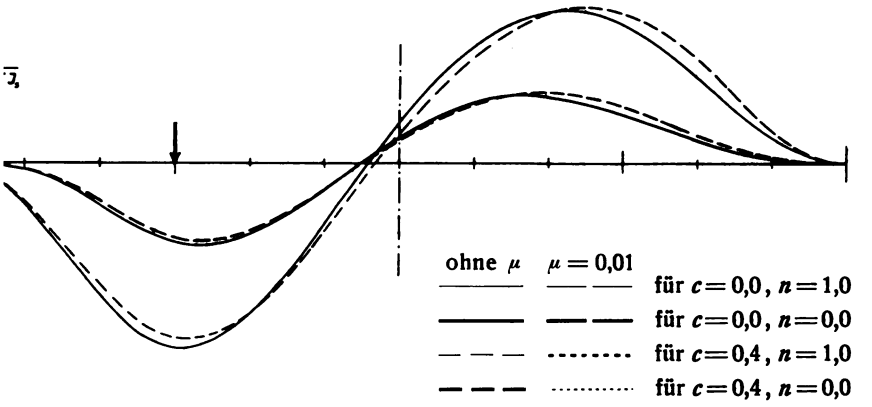
(Gleichmäßig verteilte Belastung)



(Last im Scheitel)



(Last im Viertel)



Die zweite Integration ergibt mit $\eta = \frac{z}{L_1}$:

$$\underset{links}{\delta} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[384\,\underset{l}{C_2} + 384\,\eta\,\underset{l}{C_1} - 32\,\eta^2\Big(\xi' - r_1 - r_2 - \frac{c_0'}{2}k_\mu\Big)(6 - m\,\eta^2)$$
$$- 64\,\eta^3(-\xi' - r_1 + r_2)(1 - 0{,}3\,m\,\eta^2) - 16\,\eta^4 c'\,k_\mu(1 - 0{,}4\,m\,\eta^2) \quad (34_l)$$
$$- 8\,\eta^6\,c\,k_\mu\Big(0{,}8 - \frac{3}{7}m\,\eta^2\Big)\Big]$$

Die Integrationskonstante C_2 folgt aus der Randbedingung $\underset{\eta=1}{\delta} = 0$:

$$\underset{links}{C_2} = \frac{EJ_s\,\varepsilon}{L}(4\,r_1 - c_0\,k_\mu) - \frac{1}{6}(\xi' - 5\,r_1 - r_2) + \frac{m}{20}(\xi' - 9\,r_1 - r_2)$$
$$+ \frac{1}{4}k_\mu\Big[\Big(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\Big) - m\Big(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\Big)\Big] \quad (33_l)$$

Für den Teil rechts der Last.

Analog folgt:

$$\underset{rechts}{M} = \frac{PL}{2}\Big[\xi\Big(1 + \frac{z}{L_1}\Big) - r_1\Big(1 + \frac{z}{L_1}\Big) - r_2\Big(1 - \frac{z}{L_1}\Big) - \frac{1}{2}k_\mu\Big(c_0' - c'\frac{z^2}{L_1^2} - c\frac{z^4}{L_1^4}\Big)\Big] \quad (31_r)$$

$$\underset{rechts}{C_1} = \frac{EJ_s\,\varepsilon}{L}(4\,r_2 - c_0\,k_\mu) - \frac{1}{2}(\xi - r_1 - 3\,r_2) + \frac{m}{12}(\xi - r_1 - 7\,r_2)$$
$$+ \frac{1}{2}k_\mu\Big[\Big(c_0' - \frac{c'}{3} - \frac{c}{5}\Big) - m\Big(\frac{c_0'}{3} - \frac{c'}{5} - \frac{c}{7}\Big)\Big] \quad (32_r)$$

$$\underset{rechts}{C_2} = \frac{EJ_s\,\varepsilon}{L}(4\,r_2 - c_0\,k_\mu) - \frac{1}{6}(\xi - r_1 - 5\,r_2) + \frac{m}{20}(\xi - r_1 - 9\,r_2)$$
$$+ \frac{1}{4}k_\mu\Big[\Big(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\Big) - m\Big(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\Big)\Big] \quad (33_r)$$

$$\underset{rechts}{\delta} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[384\,\underset{r}{C_2} + 384\,\eta\,\underset{r}{C_1} - 32\,\eta^2\Big(\xi - r_1 - r_2 - \frac{c_0'}{2}k_\mu\Big)(6 - m\,\eta^2)$$
$$- 64\,\eta^3(\xi - r_1 + r_2)(1 - 0{,}3\,m\,\eta^2) - 16\,\eta^4 c'\,k_\mu(1 - 0{,}4\,m\,\eta^2)$$
$$- 8\,\eta^6\,c\,k_\mu\Big(0{,}8 - \frac{3}{7}m\,\eta^2\Big)\Big] \quad (34_r)$$

In den obigen Gleichungen ist der Wert von η für alle Punkte links vom Scheitel positiv, und für alle rechts negativ einzusetzen.

b) Anwendung für den voll eingespannten Bogen

Für den Grenzfall einer totalen Einspannung lassen sich die Gleichungen der Biegungslinie sehr einfach aus den allgemeinen Gleichungen (31 bis 34) ableiten, indem man überall für ε und ψ den Wert Null einsetzt. Für die Konstanten C ergeben sich einige Vereinfachungen:

$$C_{1\,links} = \frac{1}{2}(\xi' - 3r_1 - r_2) - \frac{m}{12}(\xi' - 7r_1 - r_2)\ ^{9}) \qquad (35_l)$$

$$C_{2\,links} = -\frac{1}{6}(\xi' - 5r_1 - r_2) + \frac{m}{20}(\xi' - 9r_1 - r_2) + \frac{1}{4}k_\mu\left[\left(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\right) - m\left(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\right)\right] \qquad (36_l)$$

$$C_{1\,rechts} = -\frac{1}{2}(\xi - r_1 - 3r_2) + \frac{m}{12}(\xi - r_1 - 7r_2)\ ^{9}) \qquad (35_r)$$

$$C_{2\,rechts} = -\frac{1}{6}(\xi - r_1 - 5r_2) + \frac{m}{20}(\xi - r_1 - 9r_2) + \frac{1}{4}k_\mu\left[\left(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\right) - m\left(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\right)\right] \qquad (36_r)$$

c) Für den Zweigelenkbogen

Bei diesem zweiten Grenzfall lassen sich die gewünschten Gleichungen nicht einfach aus den allgemeinen Gleichungen ableiten, da man hier für die Bestimmung der Integrationskonstanten ε, das hier unendlich groß ist, mit Null zu multiplizieren hat. Das Produkt ist unbestimmt. Wir müssen deshalb die Gleichung der Biegungslinie des Zweigelenkbogens für sich suchen. Wir haben:

$$M = M_0 - H \cdot y,$$

$$M_{0\,links} = P\xi'(L_1 - z), \qquad M_{0\,rechts} = P\xi(L_1 + z),$$

$$H = k_\mu \cdot \frac{PL}{4f} \qquad \text{und} \qquad y = f(1 - c'\eta^2 - c\eta^4)$$

---

[9]) Der letzte Summand von Gleichung (32) fällt weg, da er hier gleich Null ist.

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} M_{links} &= \frac{PL}{4}\left[2\,\xi'(1-\eta) - k_\mu(1-c'\,\eta^2 - c\,\eta^4)\right] \\ M_{rechts} &= \frac{PL}{4}\left[2\,\xi(1+\eta) - k_\mu(1-c'\,\eta^2 - c\,\eta^4)\right] \end{aligned} \tag{37}$$

$$\frac{d\,\delta}{dz}_{links} = \frac{PL^2}{8EJ_s}\left[2\,C_1 - (2\,\xi' - k_\mu)\,\eta + \xi'\,\eta^2 - \frac{1}{3}(c'\,k_\mu + m\,k_\mu - 2\,m\,\xi')\,\eta^3 - \frac{m}{2}\,\xi'\,\eta^4 - \frac{1}{5}\,k_\mu(c - m\,c')\,\eta^5 + \frac{m}{7}\,c\,k_\mu\,\eta^7\right] \tag{38$_l$}$$

$$\delta_{links} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[384\,C_2 + 384\,\eta\,C_1 - 32\,\eta^2\left(\xi' - \frac{1}{2}\,k_\mu\right)(6 - m\,\eta^2) + 64\,\xi'\,\eta^3(1 - 0{,}3\,m\,\eta^2) - 16\,k_\mu\,c'\,\eta^4(1 - 0{,}4\,m\,\eta^2) - 8\,k_\mu\,c\,\eta^6\left(0{,}8 - \frac{3}{7}\,m\,\eta^2\right)\right] \tag{39$_l$}$$

$$\frac{d\,\delta}{dz}_{rechts} = \frac{PL^2}{8EJ_s}\left[2\,C_1 - (2\,\xi - k_\mu)\,\eta - \xi\,\eta^2 - \frac{1}{3}(c'\,k_\mu + m\,k_\mu - 2\,m\,\xi)\,\eta^3 + \frac{m}{2}\,\xi\,\eta^4 - \frac{1}{5}\,k_\mu(c - m\,c')\,\eta^5 + \frac{m}{7}\,c\,k_\mu\,\eta^7\right] \tag{38$_r$}$$

$$\delta_{rechts} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[384\,C_2 + 384\,\eta\,C_1 - 32\,\eta^2\left(\xi - \frac{1}{2}\,k_\mu\right)(6 - m\,\eta^2) - 64\,\xi\,\eta^3(1 - 0{,}3\,m\,\eta^2) - 16\,k_\mu\,c'\,\eta^4(1 - 0{,}4\,m\,\eta^2) - 8\,k_\mu\,c\,\eta^6\left(0{,}8 - \frac{3}{7}\,m\,\eta^2\right)\right] \tag{39$_r$}$$

Die Gleichungen (38) und (39) enthalten vier Integrationskonstanten, welche durch folgende Bedingungen ermittelt werden:

1. $\delta_{\eta=1} = 0$ (beim linken Auflager)
2. $\delta_{\eta=-1} = 0$ („ rechten „)
3. $\delta_{l\,\eta=\varkappa} = \delta_{r\,\eta=\varkappa}$ (wegen der Kontinuität der Biegungslinie)
4. $\frac{d\,\delta_l}{dz}_{\eta=\varkappa} = \frac{d\,\delta_r}{dz}_{\eta=\varkappa}$ („ „ „ „ „)

Daraus erhält man:

$$C_{1\,l} = \frac{\varkappa}{24}\left[4\,(1-0{,}1\,m)+6\,\varkappa+2\,\varkappa^2-m\,\varkappa^3-0{,}6\,m\,\varkappa^4\right] \quad (4$$

$$C_{1\,r} = \frac{\varkappa}{24}\left[4\,(1-0{,}1\,m)-6\,\varkappa+2\,\varkappa^2+m\,\varkappa^3-0{,}6\,m\,\varkappa^4\right] \quad (4$$

$$C_{2\,l} = \frac{1}{3}\,\xi'(1-0{,}1\,m)-\frac{1}{24}\,k_\mu\left[(6-m)-c'\,(1-0{,}4\,m)-c\left(0{,}4-\frac{3}{14}\,m\right)\right]-C_{1\,l} \quad (4$$

$$C_{2\,r} = \frac{1}{3}\,\xi\,(1-0{,}1\,m)-\frac{1}{24}\,k_\mu\left[(6-m)-c'\,(1-0{,}4\,m)-c\left(0{,}4-\frac{3}{14}\,m\right)\right]+C_{1\,r} \quad (4$$

2. Einzellast im Scheitel

Für den elastisch eingespannten Bogen.

Aus Gleichungen (10 bis 12) mit $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$ folgt

$$M_1 = M_2 = M_i = M_k = -\,a\,P\,\frac{5\,(n+5)}{16\,(n+4)}\,, \qquad r = \frac{5\,(n+5)}{16\,(n+4)}\cdot\frac{a}{L} \quad (42)$$

Den Faktor k des Horizontalschubes H liefert uns Gleichung (20) mit $\varkappa = 0$:

$$k = \frac{\lambda}{2}\left[c_0' - \frac{c'+m\,c_0'}{6} - \frac{c-m\,c'}{15} + \frac{m\,c}{28}\right] \quad (43)$$

Da die Biegungslinie beim Scheitel, wegen der Symmetrie, horizontal ist, wird $C_1 = 0$. Für die Momente und Einsenkungen erhalten wir nur je eine Gleichung. Es wird:

$$M = \frac{PL}{4}\left[1 \mp \eta - 4\,r - k_\mu\,(c_0' - c'\,\eta^2 - c\,\eta^4)\right]^{10)} \quad (44)$$

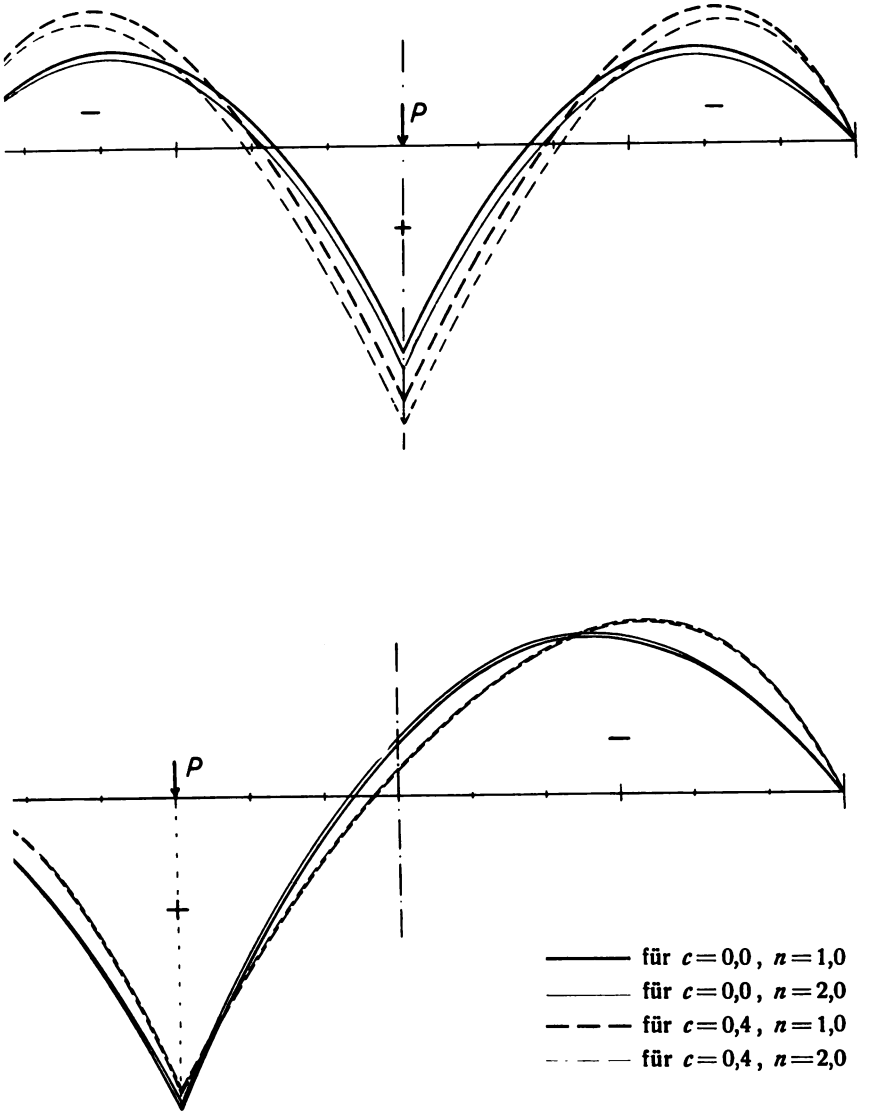
$$\begin{aligned}\delta = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[&384\,C_2 - 32\,\eta^2\left(\frac{1}{2} - 2\,r - \frac{1}{2}\,c_0'\,k_\mu\right)(6 - m\,\eta^2)\\ &\pm 32\,\eta^3\,(1 - 0{,}3\,m\,\eta^2) - 16\,\eta^4\,c'\,k_\mu\,(1 - 0{,}4\,m\,\eta^2)\\ &- 8\,\eta^6\,c\,k_\mu\left(0{,}8 - \frac{3}{7}\,m\,\eta^2\right)\Big]^{10)}\end{aligned} \quad (45)$$

worin

$$\begin{aligned}C_2 = \frac{EJ_s\,\varepsilon}{L}\,(4\,r - c_0\,k_\mu) + \left(r - \frac{1}{12}\right) - \frac{m}{2}\left(r - \frac{1}{20}\right)\\ + \frac{1}{4}\,k_\mu\left[\left(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\right) - m\left(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\right)\right]\end{aligned} \quad (46)$$

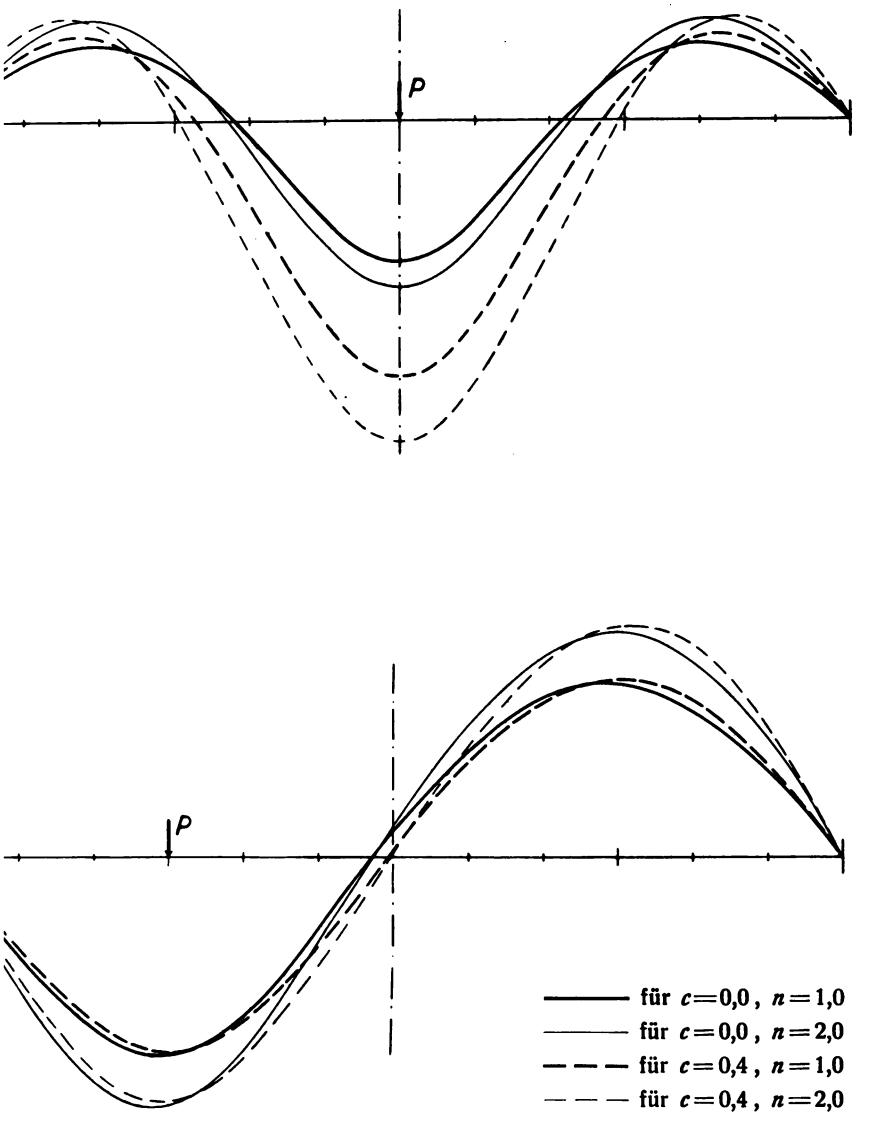
[10] Bei Doppelvorzeichen gilt das untere für die rechte Hälfte des Bogens, wobei η negativ einzusetzen ist.

Tafel VIII.
Die Momentenflächen beim Zweigelenkbogen.



Tafel IX.

Die Biegungslinien des Zweigelenkbogens.



ir den voll eingespannten Bogen.

Hier sind die Beziehungen noch einfacher, weil $\varepsilon = 0$ ist. Die igen Gleichungen gelten, die letzte kann jedoch wie folgt ver- ıfacht werden:

$$= \left(r - \frac{1}{12}\right) - \frac{m}{2}\left(r - \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{4} k_\mu \left[\left(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3}\right) - m\left(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4}\right)\right] \quad (47)$$

ür den Zweigelenkbogen.

Hier ist $C_1 = 0$, und aus Gleichung (41) folgt:

$$= \frac{1}{6}(1 - 0{,}1\,m) - \frac{1}{24} k_\mu \left[(6 - m) - c'(1 - 0{,}4\,m) - \frac{c}{2}\left(0{,}8 - \frac{3}{7} m\right)\right] \quad (48)$$

rin ist k_c aus Gleichung (29) wie folgt einzusetzen:

$$k_\mu = \frac{\lambda_\mu}{2}\left[1 - \frac{c' + m}{6} - \frac{c - mc'}{15} + \frac{mc}{28}\right] \quad (49)$$

r die Biegungslinie erhalten wir:

$$= \frac{PL^3}{3072 E J_s}\Big[384\, C_2 - 16\,\eta^2 (1 - k_\mu)(6 - m\eta^2) \pm 32\,\eta^3 (1 - 0{,}3\, m\eta^2)$$

$$- 16\,\eta^4 c' k_\mu (1 - 0{,}4\, m\eta^2) - 8\,\eta^6 c k_\mu \left(0{,}8 - \frac{3}{7} m\eta^2\right)\Big]^{10}) \quad (50)$$

Einzellast im Viertel

Für den *elastisch eingespannten Bogen* gewinnt man mit $= \frac{1}{4}$, $\xi' = \frac{3}{4}$ und $\varkappa = \frac{1}{2}$ folgende vereinfachte Formeln:

$$r_i = \frac{15\,(43 + 13\,n)}{512\,(4 + n)}, \qquad r_k = \frac{15\,(33 + 7\,n)}{512\,(4 + n)} \quad (51)$$

$$k = \frac{\lambda}{64}\left[24\, c_0' - 5\,(c' + m\, c_0') - 2{,}1\,(c - mc') + \frac{255}{224}\, mc\right] \quad (52)$$

Bei den *voll eingespannten Bogen* hat man:

$$= \frac{27\,(14 + 21\,n + 5\,n^2)}{512\,(2 + n)(2 + 3\,n)}, \quad r_2 = \frac{3\,(26 + 79\,n + 15\,n^2)}{512\,(2 + n)\,(2 + 3\,n)} \quad (53)$$

Für den *Zweigelenkbogen* erhalten wir:

$$C_{1\,l} = \frac{1}{96}\,(15 - 1{,}125\, m), \qquad C_{1\,r} = \frac{1}{96}\,(3 - 0{,}625\, m) \quad (54)$$

und

$$C_{\frac{2}{l}} = \frac{1}{96}(9-1{,}275\,m) - \frac{1}{24}k_\mu\left[(6-c'-0{,}4\,c) - m\left(1-0{,}4\,c'-\frac{3}{14}\,c\right)\right] \quad (55_l)$$

$$C_{\frac{2}{r}} = \frac{1}{96}(11-1{,}425\,m) - \frac{1}{24}k_\mu\left[(6-c'-0{,}4c) - m\left(1-0{,}4\,c'-\frac{3}{14}\,c\right)\right] \quad (55_r)$$

Für die Biegungslinie selbst dient der Ausdruck (39) und für k die Gleichung (29).

4. Gleichmäßig verteilte Belastung

In der Theorie des elastisch eingespannten Balkens hat man:

$$M_i = -\frac{a}{L}\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha_2}$$

Ferner ist:

$$\alpha_0 = \frac{pL^3}{24EJ_s}\left(1-\frac{m}{5}\right), \qquad \text{und} \qquad \alpha_2 = \frac{L}{6EJ_s}\left(1-\frac{m}{5}\right)$$

Daraus und infolge der Symmetrie wird:

$$M_1 = M_2 = M_i = M_k = -\frac{apL}{4} \quad (56)$$

und für das Schnittmoment:

$$M = \frac{pL^2}{8}\left[\left(1-2\,\frac{a}{L}-\eta^2\right) - k'_\mu\left(c_0'-c'\eta^2-c\eta^4\right)\right] \quad (57)$$

Die Differentialgleichung der Biegungslinie ist dann:

$$\frac{d^2\delta}{dz^2} = -\frac{pL^2}{8EJ_s}\left[\left(1-2\,\frac{a}{L}-\eta^2\right) - k'_\mu\left(c_0'-c'\eta^2-c\eta^4\right)\right]\left[1-m\eta^2\right]$$

Nach zweimaliger Integration mit Berücksichtigung der Integrationskonstanten erhalten wir für die Biegungslinie:

$$\delta = \frac{pL^4}{3072EJ_s}\Big[96\,C_2 - 8\,\eta^2\left(1-\frac{2\,a}{L}-c_0'\,k'_\mu\right)\left(6-m\,\eta^2\right) + 8\,\eta^4(1-c'\,k'_\mu)(1-0{,}4\,m\,\eta^2) - 8\,\eta^6\,c\,k'_\mu\left(0{,}4-\frac{3}{14}\,m\eta^2\right)\Big] \quad (58)$$

orin

$$= \frac{1}{12}\left[\left(5 - 12\frac{a}{L}\right) - m\left(0{,}6 - 2\frac{a}{L}\right)\right]$$

$$- \frac{k'_\mu}{12}\left[(6c_0' - c' - 0{,}4c) - m\left(c_0' - 0{,}4c' - \frac{3}{14}c\right)\right] \quad (59)$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Zweigelenkbogen lauten:

$$= \frac{pL^2}{8}\left[(1-\eta^2) - k'_\mu(1 - c'\eta^2 - c\eta^4)\right] \quad (60)$$

$$= \frac{pL^4}{3072EJ_s}\left[96C_2 - 8\eta^2(1-k'_\mu)(6-m\eta^2) + 8\eta^4(1-c'k'_\mu)(1-0{,}4m\eta^2)\right.$$

$$\left. - 8\eta^6 ck_\mu'\left(0{,}4 - \frac{3}{14}m\eta^2\right)\right] \quad (61)$$

$$= \frac{1}{12}(5-0{,}6m) - \frac{k'_\mu}{12}\left[(6-c'-0{,}4c) - m\left(1-0{,}4c'-\frac{3}{14}c\right)\right] \quad (62)$$

D. Die Scheitelsenkung

Unter Einzellast an beliebiger Stelle

für den elastisch eingespannten Bogen.

Wir nehmen zunächst an, die Last befinde sich links vom Scheitel. Die Gleichung (34$_r$) liefert uns die Senkung des Scheitels, wenn man $\eta = 0$ einsetzt. Wir bekommen:

$$\delta_{\substack{s \\ t\ links}} = \frac{PL^3}{3072EJ_s} \cdot 384\, C_{\substack{2 \\ r}}$$

aus Gleichung (33$_r$) folgt:

$$= \frac{PL^3}{3072EJ_s}\left[384EJ_s\frac{\varepsilon}{L}(4r_2 - c_0k_\mu) - 64(\xi - r_1 - 5r_2) + 19{,}2m(\xi - r_1 - 9r_2)\right.$$

$$\left. + 16k_\mu(6c_0' - 3c' - 2c) - 8mk_\mu(6c_0' - 4c' - 3c)\right] \quad (63_l)$$

befindet sich die Last rechts vom Scheitel, so folgt analog:

$$= \frac{PL^3}{3072EJ_s}\left[384EJ_s\frac{\varepsilon}{L}(4r_1 - c_0k_\mu) - 64(\xi' - 5r_1 - r_2) + 19{,}2m(\xi' - 9r_1 - r_2)\right.$$

$$\left. + 16k_\mu(6c_0' - 3c' - 2c) - 8mk_\mu(6c_0' - 4c' - 3c)\right] \quad (63_r)$$

Für den voll eingespannten Bogen.

Wir gewinnen die entsprechenden Gleichungen aus Gleichungen (63), indem wir einfach ε und ψ gleich Null setzen.

Für den Zweigelenkbogen.

Für eine Last links vom Scheitel bekommt man aus den Gleichungen (39_r) und (41_r):

$$\underset{\text{Last links}}{\delta_s} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[128\,\xi\,(1-0{,}1\,m)-16\,k_\mu\,(6-m)+16\,c'\,k_\mu\,(1-0{,}4\,m) + 8\,c\,k_\mu\left(0{,}8-\frac{3}{7}\,m\right)+384\,C_{1_r}\Big] \tag{64$_l$}$$

Und aus den Gleichungen (39_l) und (41_l) erhält man analog

$$\underset{\text{Last rechts}}{\delta_s} = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[128\,\xi'\,(1-0{,}1\,m)-16\,k_\mu\,(6-m)+16\,c'\,k_\mu\,(1-0{,}4\,m) + 8\,c\,k_\mu\left(0{,}8-\frac{3}{7}\,m\right)-384\,C_{1_l}\Big] \tag{64$_r$}$$

Die Werte von C_1 sind in den Gleichungen (40) gegeben.

2. Unter Einzellast im Scheitel

a) Infolge der Momente

Für den elastisch eingespannten Bogen.

Hier ist $\xi = \xi' = \frac{1}{2}$ und $r_1 = r_2 = r$. Damit läßt sich Gleichung (63) auf folgende Form bringen:

$$\delta_s = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[384\,EJ_s\,\frac{\varepsilon}{L}\,(4r-c_0\,k_\mu)+32\,(12r-1)-9{,}6\,m\,(20r-1) + 8\,k_\mu\left\{2\,(6\,c_0'-3\,c'-2\,c)-m\,(6\,c_0'-4\,c'-3\,c)\right\}\Big]^{11}) \tag{65}$$

Für den voll eingespannten Bogen.

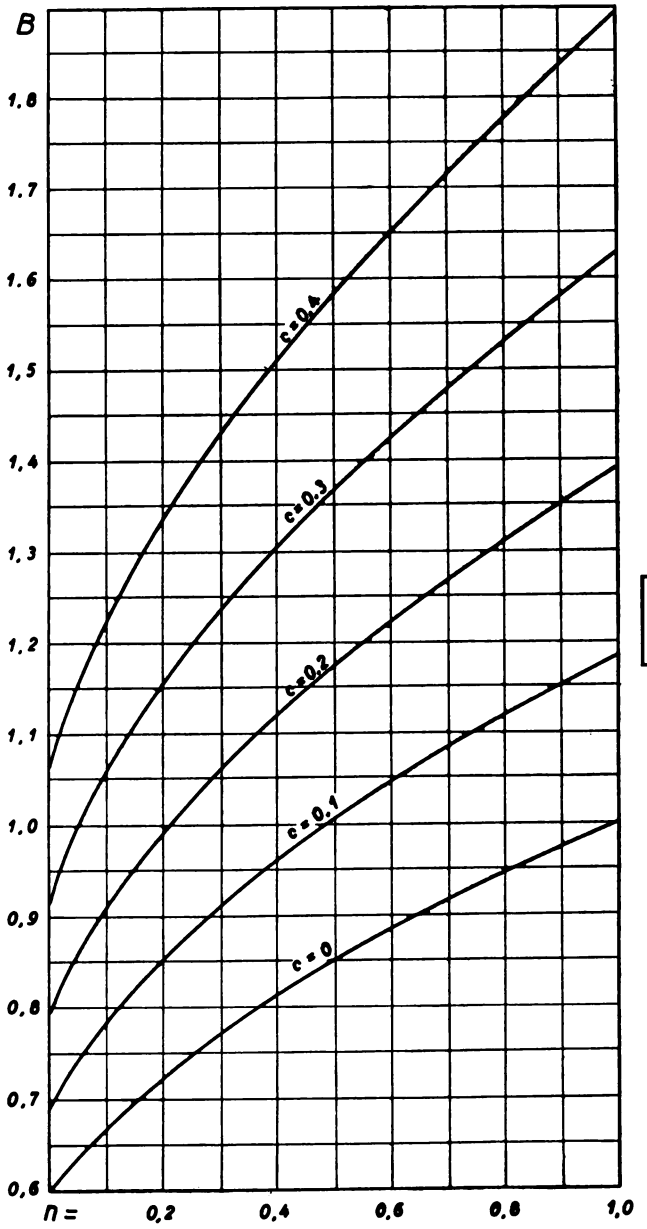
Wir setzen $\varepsilon = \psi = 0$ in Gleichung (65) und bekommen:

$$\delta_s = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\Big[32\,(12\,r-1)-9{,}6\,m\,(20\,r-1) + 8\,k_\mu\left\{2\,(6\,c_0'-3\,c'-2\,c)-m\,(6\,c_0'-4\,c'-3\,c)\right\}\Big] \tag{66}$$

[11]) Für r und k siehe Gl. (42) und (43).

ıfel X. Zur Ermittlung der Scheitelsenkung des eingespannten Bogens infolge einer Last P im Scheitel.

(Einfluß der Momente)



$$\delta_s = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s} \cdot B$$

Nach den Gleichungen (26) und 42) ist $r = \frac{n+5}{16(n+2)}$;
:iter ergeben sich k und c_0' aus den Gleichungen (43) und (27'),
wie aus den Tafeln IV und II.

Den Wert von r in Gleichung (66) eingesetzt, ergibt:

$$= \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[\frac{4(3n^2+38n+19)}{5(n+2)} + 8k_\mu\left\{6c_0'(1+n) - 2c'(1+2n) - c(1+3n)\right\}\right] \quad (67)$$

Setzt man ferner die Ausdrücke k, c_0' und c' ein, so folgt:

$$\frac{PL^3}{72\,EJ_s}\left[\frac{4(3n^2+38n+19)}{5(n+2)} - \frac{\lambda_\mu}{3}\left\{\frac{n^2(14+c)+n(140-21c)+(56-22c)}{35(n+2)}\right\}^2\right] \quad (68)$$

:r genaue Wert von λ ist aus Gleichung (18) zu entnehmen oder
sch aus Tafel III abzulesen; man kann auch die einfachere und
nügend genaue Formel benützen:

$$\lambda = \frac{45}{4}\cdot\frac{2{,}9+0{,}8n}{1+2{,}7n}\left[1+0{,}6c-0{,}32cn\right] \text{ [12]} \quad (69)$$

Sonderfall: Bei $n = 1$, $c = 0$ wird

$$\delta_s = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[\frac{1+16\mu}{1+\mu}\right] \quad (70)$$

ür den Zweigelenkbogen.

Aus den Gleichungen (64) folgt:

$$= \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[64(1-0{,}1m) - 16k_\mu\left\{(5-0{,}6m)+c\left(0{,}6-\frac{13}{70}m\right)\right\}\right] \text{ [13]} \quad (71)$$

Man kann auch die Gleichung (71) in einer ähnlichen Form
e Gleichung (68) schreiben. Es wird

$$= \frac{PL^3}{3072\,EJ_s}\left[64(0{,}9+0{,}1n) - \frac{4}{3}\lambda_\mu\left(\frac{308+29c+42n+13nc}{70}\right)^2\right] \quad (72)$$

---

[12]) Prof. Ritter: Denkschrift der E.T.H. 1937.

[13]) Für k siehe Gl. (49) und (28).

Sonderfall: $n = 1, c = 0.$

$$\delta_s = \frac{PL^3}{2048\,EJ_s}\left[\frac{1 + 42{,}7\,\mu}{1 + \mu}\right]$$

Aus den obigen zwei Sonderfällen läßt sich erkennen, daß bei der Berechnung der Formänderungen μ nicht zu vernachlässigen ist.

b) Infolge der Normalkräfte

Für den voll eingespannten Bogen.

Wir haben bis jetzt die Senkungen infolge der Momente allein betrachtet. Das war in der Hauptsache deswegen, weil die Senkungen infolge der Normal- und Querkräfte im allgemeinen viel kleiner sind als diejenigen infolge der Biegungsmomente. Um dies darzustellen, berechnen wir zunächst die Scheitelsenkung infolge der Normalkräfte unter einer Last P im Scheitel.

Wir betrachten ein Teilelement des Bogens von der Länge ds und mit dem Neigungswinkel φ. Infolge der Normalkraft N wird dieses Element eine Verkürzung Δds erfahren, dessen vertikales Komponent $\Delta ds \sin\varphi$ ist. Die Scheitelsenkung läßt sich somit nach dem geometrischen Verfahren von Bresse wie folgt ausdrücken

$$\delta_N = \int_0^{L_1} \Delta ds \sin\varphi = \int_0^{L_1} \frac{N ds}{EF} \sin\varphi$$

worin $$N = N_0 + H\cos\varphi = \frac{P}{2}\sin\varphi + \frac{PL}{4f} k_\mu \cos\varphi$$

Es wäre sehr umständlich, für F ein einfaches Gesetz abzuleiten, da das Trägheitsmoment durch ein Potenzgesetz gegeben ist und die Breite variieren kann. Um das Integral zu bestimmen, machen wir die übliche Annahme, daß $F\cos\varphi = F_s$ = konstant ist. Der begangene Fehler ist gewöhnlich klein. Somit wird:

$$\delta_N = \int_0^{L_1} P\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{L}{4f}k_\mu\cos\varphi\right)\frac{dz}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{E}\cdot\frac{\cos\varphi}{F_s}\cdot\sin\varphi$$

$$= \frac{P}{EF_s}\int_0^{L_1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{L\,k_\mu}{4f}\operatorname{tg}\varphi\right)dz\cos^2\varphi$$

o $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy'}{dz} = -\left(2c'f\frac{z}{L_1^2} + 4cf\frac{z^3}{L_1^4}\right)^{14)} \qquad (73)$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = 4c'^2f^2\frac{z^2}{L_1^4} + 16c'cf^2\frac{z^4}{L_1^6} + 16c^2f^2\frac{z^6}{L_1^8}$$

s folgt:

$$\delta_N = \frac{P}{EF_s}\int_0^{L_1}\left(c'k_\mu\frac{z}{L_1} + 2c'^2f^2\frac{z^2}{L_1^4} + 2ck_\mu\frac{z^3}{L_1^3}\right.$$
$$\left. + 8c'cf^2\frac{z^4}{L_1^6} + 8c^2f^2\frac{z^6}{L_1^8}\right)dz\cos^2\varphi$$

Um die Integration durchführen zu können, müssen wir für $\cos^2\varphi$ eine Vereinfachung vornehmen. Wir setzen für φ den konanten Mittelwert $\varphi_1 = \operatorname{arctg} f/L_1$ (vergl. Abb. 1). Der Fehler t klein. Somit folgt:

$$\delta_N = \frac{P\cos^2\varphi_1}{EF_s}\int_{z=0}^{z=L_1}\left(c'k_\mu\frac{z}{L_1} + 2c'^2f^2\frac{z^2}{L_1^4} + 2ck_\mu\frac{z^3}{L_1^3}\right.$$
$$\left. + 8c'cf^2\frac{z^4}{L_1^6} + 8c^2f^2\frac{z^6}{L_1^8}\right)dz$$

ie Integration ergibt:

$$\delta_N = \frac{P}{EF_s}\cdot\frac{L_1^2}{L_1^2+f^2}\left[\frac{1}{2}c'k_\mu L_1 + \frac{2c'^2f^2}{3L_1} + \frac{1}{2}ck_\mu L_1\right.$$
$$\left. + \frac{8}{5}c'c\frac{f^2}{L_1} + \frac{8}{7}\frac{c^2f^2}{L_1}\right]$$

etzen wir für f/L_1 die Bezeichnung ϑ, so wird

$$\delta_N = \frac{PL}{EF_s}\cdot\frac{1}{1+\vartheta^2}\left[\frac{\vartheta^2}{105}(11c^2+14c+35) + \frac{1}{4}k_\mu\right] \qquad (74)$$

---

14) Das Minuszeichen vor der Klammer hat hier nur eine trigonometrische Bedeutung.

Für den Zweigelenkbogen.

Wir machen hier für F die Annahme: $F = F_s$ = konstant, welche in der Praxis meistens zutrifft. Es folgt analog

$$\delta_N = \frac{PL}{EF_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \left[\frac{\vartheta^2}{105}(11c^2+14c+35)+\frac{1}{4}k_\mu\right] \qquad (75)$$

Für den elastisch eingespannten Bogen.

Ein allgemeiner Ausdruck für den elastisch eingespannten Bogen kann nicht gefunden werden, da der Verlauf von F für jeden einzelnen Bogen getrennt bestimmt werden müßte.

c) Infolge der Querkräfte

Für den voll eingespannten Bogen.

Wir betrachten wieder ein Bogenelement ds mit dem Neigungswinkel φ. Sein Ende erleidet infolge der Querkraft Q eine Verschiebung $\frac{Q\,ds}{GF'}$, deren vertikales Komponent $\frac{Q\,ds}{GF'}\cos\varphi$ ist. Mit

$$Q = Q_0 - H\sin\varphi = \frac{P}{2}\cos\varphi - \frac{PL}{4f}k_\mu \sin\varphi$$

und mit $F'\cos\varphi = F_s'$ wird:

$$\delta_Q = \int_0^{L_1} P\left(\frac{\cos\varphi}{2} - \frac{L}{4f}k_\mu\sin\varphi\right)\frac{dz}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{G}\cdot\frac{\cos\varphi}{F_s'}\cdot\cos\varphi$$

$$= \frac{P}{GF_s'}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{Lk_\mu}{4f}\operatorname{tg}\varphi\right)\cos^2\varphi\,dz$$

Wir setzen jetzt für $\operatorname{tg}\varphi$ den Wert aus Gleichung (73) und nehmen $\cos^2\varphi$ als konstant an. Wir erhalten somit:

$$\delta_Q = \frac{PL}{4GF_s'}\cdot\frac{1-k_\mu}{1+\vartheta^2} \qquad (76)$$

Für den Zweigelenkbogen.

Es sei wieder $F' = F_s' =$ konstant. Damit wird:

$$\delta_Q = \frac{PL}{4GF_s'} \cdot \frac{1 - k_\mu}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \tag{77}$$

Für den elastisch eingespannten Bogen.

Wie bei der Behandlung der Normalkraft, wird man jeden Einzelfall allein betrachten.

d) Ein Zahlenbeispiel

Ein eingespannter Bogen von $L = 40{,}00$ m, $f = 13{,}33$ m, $F_s = 0{,}80/0{,}50$ m, mit $n = 0{,}24$ und $c = 0{,}15$ ist am Scheitel mit 10 Tonnen belastet.

E Beton $= 3\,000\,000$ t/m², Poisson'sche Zahl $m = 5$.

Aus Tafel IV: $k = 1{,}040$.

$$G = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{3 \cdot 10^6}{2\left(1+\frac{1}{5}\right)} = 1{,}25 \cdot 10^6$$

Nach Tafel X ist

$$\delta_M = \frac{PL^3}{3072\,EJ_s} \cdot B = 0{,}00324 \cdot 0{,}94 = 0{,}00305\text{ m} \text{ oder } \underline{\delta_M = 3{,}047\text{ mm}}$$

$$\delta_N = \frac{PL}{EF_s} \cdot \frac{1}{1+\vartheta^2}\left[\frac{\vartheta^2}{105}(11c^2 + 14c + 35) + \frac{1}{4}k_\mu\right]$$

$$= 0{,}0000965\text{ m} \quad \text{oder} \quad \underline{\delta_N = 0{,}0965\text{ mm}}$$

$$\delta_Q = \frac{PL}{4GF_s'} \cdot \frac{1-k_\mu}{1+\vartheta^2}$$

$$= -0{,}0000053\text{ m} \quad \text{oder} \quad \underline{\delta_Q = -0{,}0053\text{ mm}}$$

Die gesamte Einsenkung ist

$$\delta_{Total} = 3{,}047 + 0{,}0965 - 0{,}0053 = 3{,}138\text{ mm}$$

und verteilt sich in Prozenten wie folgt:

Die Biegungsmomente	erzeugen	97,4 %	der Senkung
Die Normalkräfte	erzeugen	3,1 %	der Senkung
Die Querkräfte	erzeugen	−0,5 %	der Senkung.

Man erkennt, wie wenig die Querkräfte ausmachen.

3. Unter gleichmäßig verteilter Belastung

Im allgemeinen sind bei gleichmäßig verteilter Belastung die Biegungsmomente sehr klein, die Normalkräfte groß und die Querkräfte fast gleich Null. Deshalb dürfen hier die Senkungen infolge der Normalkräfte nicht vernachlässigt werden.

a) Infolge der Momente

Wir gewinnen die Scheitelsenkung leicht aus den Gleichungen (58) und (59). Es wird:

$$\delta_M = \frac{8pL^4}{3072EJ_s}\left[\left(1-\frac{2a}{L}-c_0'k_\mu'\right)\left(6-m\right)-\left(1-c'k_\mu'\right)\left(1-0{,}4m\right)\right.$$
$$\left.+\,ck_\mu'\left(0{,}4-\frac{3}{14}m\right)\right] \qquad (78)$$

Diese Gleichung gilt für alle Einspannungen.

b) Infolge der Normalkräfte

Es ist

$$N = N_0 + H\cos\varphi$$
$$= pz\sin\varphi + \frac{pL^2}{8f}k_\mu'\cos\varphi \;^{15})$$

Analog wie früher gelangen wir nach dem Verfahren von Bresse zum Ausdruck

$$\delta_N = \int_0^{L_1}\frac{N\,ds}{EF}\cdot\sin\varphi$$

Wir setzen einen voll eingespannten Bogen voraus und machen wieder die Annahme, daß $F\cos\varphi = F_s$ = konstant ist. Somit wird

$$\delta_N = \int_0^{L_1} pL\left(\frac{z}{2L_1}\sin\varphi + \frac{L}{8f}k_\mu'\cos\varphi\right)\frac{dz}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{E}\cdot\frac{\cos\varphi}{F_s}\cdot\sin\varphi$$
$$= \frac{pL}{EF_s}\int_0^{L_1}\left[\frac{z}{2L_1}\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{L}{8f}k_\mu'\cdot\operatorname{tg}\varphi\right]dz\cos^2\varphi$$

---

15) k' bedeutet hier k unter gleichmäßig verteilter Belastung (vergl. Gl. (23)).

Nach demselben Verfahren wie früher erhalten wir:

$$\delta_N = \frac{pL^2}{12EF_s} \cdot \frac{1}{1+\vartheta^2}\left[\vartheta^2(c^2+2c+3)+1{,}5\,k_\mu'\right] \qquad (79)$$

Setzen wir einen *Zweigelenkbogen* voraus mit $F =$ konstant, so folgt:

$$\delta_N = \frac{pL^2}{10EF_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\left[\vartheta^2(c^2+2c+3)+1{,}5\,k_\mu'\right] \qquad (80)$$

Zahlenbeispiel

Ein eingespannter Bogen hat $L = 100{,}00$ m, $f = 40{,}00$ m, $n = 0{,}20$, $c = 0{,}0$, $F_s = 2{,}00/1{,}20$ m, $E = 3 \cdot 10^6$ t/m² mit 4,0 t/m¹ gleichmäßig belastet. Gesucht:

1. Scheitelsenkung infolge der Momente,
2. Scheitelsenkung infolge der Normalkräfte.

Aus den Tafeln II und III ist:

$$c_0' = 0{,}236 \quad , \quad \lambda = 22{,}4$$

Nach den Gleichungen (26), (24) und (23) erhalten wir:

$$a = 0{,}382\,L, \quad \mu = 0{,}0047 \text{ und } k_\mu' = 0{,}9953$$

Wir setzen obige Werte in Gleichungen (78) und (79) ein und erhalten

$$\underline{\delta_M = 1{,}10 \text{ mm}} \quad \text{und} \quad \underline{\delta_N = 0{,}96 \text{ mm}.}$$

Damit ist in diesem Falle die Senkung des Scheitels infolge der Normalkräfte fast so groß wie diejenige durch die Biegungsmomente. Beide Senkungen sind jedoch im Verhältnis zur Spannweite sehr klein.

4. Unter Eigengewicht

a) Infolge der Biegungsmomente

Für den voll eingespannten Bogen.

Aus der sogenannten „Methode der Ergänzungskraft" läßt sich folgender Ausdruck für das Schnittmoment ableiten [12]):

$$M = H_0 \cdot v + M_1' - \Delta H \cdot y$$

$$= H_0 \left(v - \frac{\int v\, dw}{\int dw} - \frac{\mu_v - \mu}{1 + \mu} y \right) \qquad (81)$$

Darin ist angenommen, daß die Bogenachse um das Maß v senkrecht unter der durch Mitte Scheitel und Mitte Kämpfer gehenden Stützlinie (= Stützlinie des Dreigelenkbogens) liegt. Weiter ist:

H_0 = Horizontalschub des Dreigelenkbogens.

M_1' = das totale Kämpfermoment.

ΔH = H (des eing. Bogens) $- H_0$.

$$\mu_v = \frac{\int v y\, dw}{\int y^2\, dw}$$

Infolge der Symmetrie kann man die Scheitelsenkung am einfachsten nach dem Verfahren von Bresse wie folgt ausdrücken:

$$\delta_M = - \int_{z=0}^{z=L_1} M z \frac{ds}{EJ} = - \frac{H_0}{E} \int_{z=0}^{z=L_1} \left(v - \frac{\int v\, dw}{\int dw} - \frac{\mu_v - \mu}{1 + \mu} y \right) z \frac{dz}{J} \qquad (82)$$

Diese Gleichung läßt sich am einfachsten auflösen, wenn man die Bogenachse in kleine Elemente einteilt und die Summe vom Scheitel bis zum Kämpfer bildet.

Ein einfacher *Sonderfall* liegt vor, wenn es sich um ein *Stützliniengewölbe* handelt. Hier verschwindet v, und der Ausdruck für das Schnittmoment lautet einfacher:

$$M = \frac{\mu}{1 + \mu} H_0 \cdot y = - \Delta H \cdot y$$

Es folgt:

$$\delta_M = \frac{\Delta H}{EJ_s} \int_{z=0}^{z=L_1} y z \left(1 - m \frac{z^2}{{L_1}^2} \right) dz$$

$$= \frac{\Delta H L^2 f}{8 E J_s} \left[\left(c_0' - \frac{c'}{2} - \frac{c}{3} \right) - m \left(\frac{c_0'}{2} - \frac{c'}{3} - \frac{c}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{-\Delta H L^2 f}{8 E J_s} \left[\left(c_0' - \frac{c'}{6} - \frac{c}{15} \right) - m \left(\frac{c_0'}{6} - \frac{c'}{15} - \frac{c}{28} \right) \right] \qquad (83)$$

Ist noch dazu $c = 0$[16]) und $n = 1$, so wird:

$$\delta_M = -\Delta H \frac{L^2 f}{48 E J_s} = \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{H_0 L^2 f}{48 E J_s} \tag{84}$$

Für den Zweigelenkbogen.

Hier ist $$M = H_0 v - \Delta H \cdot y$$

worin $$\Delta H = \frac{\mu_v - \mu - \mu_\psi}{1 + \mu + \mu_\psi} \cdot H_0$$

Für das *Stützliniengewölbe* hat man:

$$M = -\Delta H \cdot y = \frac{\mu + \mu_\psi}{1 + \mu + \mu_\psi} H_0 \cdot y$$

Das einfache Verfahren von Bresse läßt sich auch hier anwenden, wenn man den Scheitelpunkt infolge der Symmetrie als Origin betrachtet und die Deformationen darauf bezieht. Es wird:

$$\delta_M = \int_0^{L_1} M (L_1 - z) \frac{ds}{EJ}$$

$$= \frac{-\Delta H f L^2}{8 E J_s} \left[\left(1 - \frac{c'}{6} - \frac{c}{15} \right) - m \left(\frac{1}{6} - \frac{c'}{15} - \frac{c}{28} \right) \right] \tag{85}$$

Diese Formel ist durch die Gleichung (83) bestätigt, sowie durch die Gleichung der Biegungslinie:

$$\frac{d^2 \delta}{dz^2} = \frac{\Delta H \cdot f}{E J_s} (1 - c' \eta^2 - c \eta^4)(1 - m \eta^2)$$

Nach zweimaliger Integration erhalten wir:

$$\delta = \frac{-\Delta H f L^2}{8 E J_s} \left[C - \eta^2 \left(1 - \frac{c'}{6} \eta^2 - \frac{c}{15} \eta^4 \right) + m \eta^4 \left(\frac{1}{6} - \frac{c'}{15} \eta^2 - \frac{c}{28} \eta^4 \right) \right]$$

worin $$C = \left(1 - \frac{c'}{6} - \frac{c}{15} \right) - m \left(\frac{1}{6} - \frac{c'}{15} - \frac{c}{28} \right)$$

---

[16]) Dafür muß das Eigengewicht gleichmäßig verteilt sein.

Für den einfachen Fall von $c = 0$ und $n = 1$ hat man:

$$\delta_M = \frac{-5\,\Delta H f L^2}{48\,E J_s} = \frac{5\,H_0 f L^2}{48\,E J_s} \cdot \frac{\mu + \mu_\psi}{1 + \mu + \mu_\psi} \qquad (86)$$

Für den elastisch eingespannten Bogen.

Hier sind die Beziehungen komplizierter. Am besten wird man die Scheitelsenkung mit der Arbeitsgleichung bestimmen, wo das Integral durch eine Summe ersetzt wird.

$$1 \cdot \delta_M = \sum \frac{M' M \Delta s}{EJ}$$

$M = M_0 + M_1 - H \cdot y$, worin:

$M_0 = H_0 (y' + v)$

$$M_1 = M_t = -\frac{a}{L} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = -a H_0 \frac{\int (y' + v) x' dw}{\int x x' dw}$$

$$H = \frac{\int M_0 y\, dw}{\int y^2 dw (1+\mu+\mu_\varepsilon+\mu_\psi)} = H_0 \frac{\int (y+t+v) y\, dw}{\int y^2 dw (1+\mu+\mu_\varepsilon+\mu_\psi)} = H_0 \frac{1+\mu' t+\mu}{1+\mu+\mu_\varepsilon+}$$

$$\mu' = \frac{\int y\, dw}{\int y^2 dw}$$

b) Infolge der Normalkräfte *(Für alle Einspannungsgrade)*

Auch hier läßt sich die Scheitelsenkung nach dem Verfahren von Bresse ableiten. Ein Bogenelement von der Länge ds und mit dem Neigungswinkel φ wird sich um den Betrag $\frac{N ds}{EF}$ verkürzen. Der vertikale Komponent davon ist $\frac{N ds}{EF} \sin\varphi$. Somit wird:

$$\delta_N = \int_0^{L_1} \frac{N ds}{EF} \sin\varphi \qquad (87)$$

Mit guter Genauigkeit dürfen wir allgemein bei Eigengewicht für N den Wert $\frac{H}{\cos\varphi}$ setzen, und wenn $F = F_s \cos\varphi$ ist, was bei einem eingespannten Bogen meist der Fall ist, so ergibt sich

$$\delta_N = \int_0^{L_1} \frac{H}{\cos\varphi} \cdot \frac{ds}{E} \cdot \frac{\cos\varphi}{F_s} \cdot \sin\varphi = \frac{H}{EF_s} \int_0^{L_1} ds \sin\varphi = \frac{Hf}{EF_s} \qquad (88)$$

In diesem Falle ist die Scheitelsenkung des Bogens gleich der Verkürzung einer Säule von der Höhe f, Querschnitt F_s, und die mit H senkrecht belastet ist [17]).

E. Die Biegungslinie infolge Temperaturänderung und Schwinden

1. Die entstehenden Kräfte

Es seien ω die Ausdehnungsziffer und $t°$ die Temperaturänderung positiv als Temperaturerhöhung. Aus der Theorie des Bogenträgers [12]) erkennt man, daß bei einer Temperaturänderung nur ein Horizontalschub H erfolgt, der wie üblich an den Enden der starren Scheiben wirkt. Dies gilt für alle Einspannungsgrade. Wir werden hier die Verbiegungen nur infolge gleichmäßiger Wärmeänderung und Schwinden des symmetrisch armierten Bogens betrachten.

Es ist

$$H_t = \frac{\delta_t}{\delta'_3} = \frac{\omega t° L}{\int y^2 dw (1 + \mu + \mu_\varepsilon + \mu_\psi)} \quad [18]) \qquad (89)$$

Legt man wie früher für den Verlauf des Trägheitsmoments das Potenzgesetz und für die Bogenachse eine Parabel vierter

---

[17]) Darstellung von Prof. M. Ritter.

[18]) $\delta'_3 = \delta_3 + 2\varepsilon t^2 + \psi$ (vergl. Gl. 7 und 16).

Ordnung zu Grunde, so ergibt sich mit Benutzung der Gleichung (17):

$$H_t = \frac{EJ_s \omega t^\circ}{f^2} \cdot \lambda_\mu \tag{90}$$

2. Die Gleichungen der Biegungslinie und der Scheitelsenkung

Es ist

$$M = -H_t \cdot y = -\lambda_\mu \frac{EJ_s \omega t^\circ}{f} \left(c_0' - c' \frac{z^2}{L_1^2} - c \frac{z^4}{L_1^4} \right) \tag{91}$$

Es folgt nach der Integration der Differentialgleichung der Biegungslinie:

$$\delta_t = -\lambda_\mu \frac{\omega t^\circ L^2}{8f} \left[C_2 - c_0' \eta^2 + \frac{1}{6}(c' + mc_0')\eta^4 + \frac{1}{15}(c - mc')\eta^6 - \frac{1}{28} mc \eta^8 \right] \tag{92}$$

worin

$$C_2 = c_0' - \frac{c' + mc_0'}{6} - \frac{c - mc'}{15} + \frac{mc}{28} \tag{93}$$

Die Scheitelsenkung wird somit:

$$\delta_{t_s} = -\lambda_\mu \frac{\omega t^\circ L^2}{8f} \left(c_0' - \frac{c' + mc_0'}{6} - \frac{c - mc'}{15} + \frac{mc}{28} \right) \tag{94}$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß sich der Bogen bei Temperaturzunahme hebt.

Wenn wir in Gleichung (92) C_2 durch seinen Wert aus Gleichung (93) ersetzen, η mit x vertauschen und $-\omega t^\circ L$ durch P ersetzen, dann bekommen wir Gleichung (19), die die Einflußlinie des Horizontalschubes liefert. Behandeln wir Gleichung (94) in derselben Weise, so bekommen wir den Ausdruck für H unter einer Scheitellast (vergl. Gleichung (43)). Somit dürfen wir die Gleichungen (92) und (94) wie folgt abkürzen:

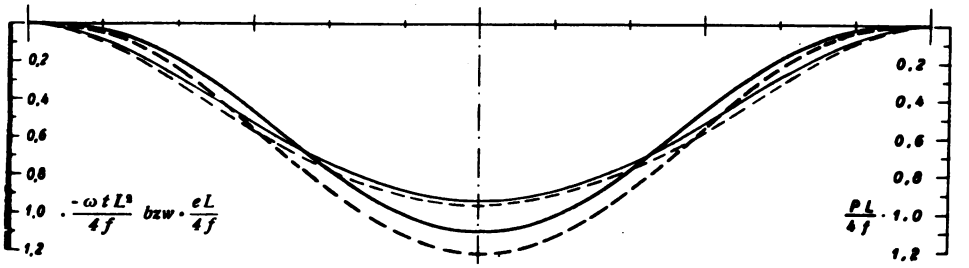
$$\delta_t = -\frac{\omega t^\circ L^2}{4f} k_\mu \tag{92'}$$

(k_μ aus Gleichung 20 bzw. 43 zu entnehmen.)

Tafel XI.

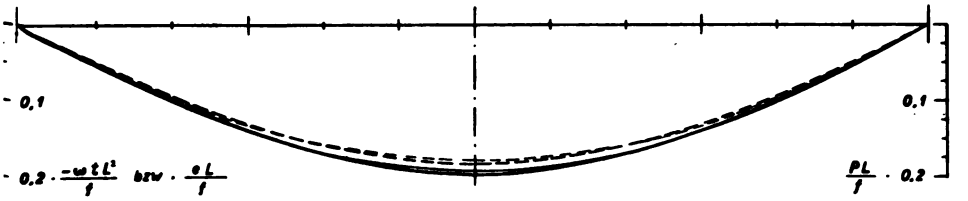
Biegungslinien infolge Temperaturänderung oder Auflagerverschiebung | **Einflußlinien des Horizontalschubes «*H*»**

Eingespannter Bogen



——— für $c = 0{,}0$, $n = 1{,}0$
——— für $c = 0{,}0$, $n = 0{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 1{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 0{,}0$

Zweigelenkbogen



——— für $c = 0{,}0$, $n = 1{,}0$
——— für $c = 0{,}0$, $n = 2{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 1{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 2{,}0$

In Bezug auf die Temperaturänderung zeigt die Tafel nur die gezwungenen Senkungen infolge der Einwirkung der Kraft H (Gleichung 92). Die totalen Senkungen ergeben sich nach der Addition des Betrages $-\omega t^0 y'$ (die freien Senkungen).

F. Die Biegungslinie infolge Widerlagerbewegungen

1. Einleitung

Bekanntlich sind die Fundamente eines Bogens Bewegungen ausgesetzt, die unter Umständen sehr schädlich sein können [19]). Es ist unser Ziel, die dadurch eintretenden Kräfte und Deformationen zu untersuchen. Bei den Probebelastungen, die für die Bestimmung der Steifigkeit und die Schätzung der Güte des Bogens vorgenommen werden, muß man, um ein richtiges Resultat zu erhalten, auch noch die eventuellen Bewegungen der Widerlager messen und ihre Einflüsse auf die Bogensenkungen in Rechnung ziehen. Diese Widerlagermessungen sind auch nötig, um uns zu vergewissern, wie viel unsere voraussichtlichen Schätzungen der Widerlagerverhältnisse mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Ohne diese Kenntnisse kann man kein richtiges Bild der Spannungsverteilung im Bauwerk erhalten.

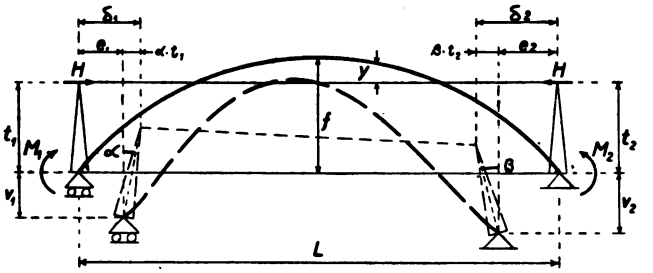


Abb. 3

2. Allgemeiner Ausdruck für die auftretenden Momente und Kräfte

Wir stellen uns vor, daß beide Widerlager Verschiebungen und Drehungen in der Tragebene erlitten haben. Das linke Widerlager ist um v_1 eingesunken, um e_1 nach rechts verschoben, und habe sich um α gedreht, wobei das rechte Widerlager um v_2 bzw.

[19]) Es versteht sich, daß hier nur diejenigen Bogen betrachtet sind, die als fest gelagert angenommen wurden, namentlich der voll eingespannte Bogen und der Zweigelenkbogen.

e_2 verschoben und um den Winkel β gedreht wird (Abb. 3). α sei positiv im Sinne des Uhrzeigers, β positiv im Gegensinn. Noch die Einsenkung sei positiv, und die horizontale Verschiebung e bzw. δ sei positiv als Verkürzung. Gegeben seien die gemessenen Größen α, v_1 und e_1, sowie β, v_2 und e_2, und gesucht sind die dabei auftretenden Kräfte und Momente.

Wir nehmen wie vorher den einfachen Balken mit starren Scheiben als Grundsystem an und verwenden das Superpositionsgesetz, um die Deformationen auszudrücken. Es wird somit

$$\alpha = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + \frac{v_2 - v_1}{L} \quad ^{20})$$

$$\beta = M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2 + \frac{v_1 - v_2}{L} \quad ^{20})$$

und

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= e_1 + \alpha t_1 \\ \delta_2 &= e_2 + \beta t_2 \\ \delta &= \delta_1 + \delta_2 = H \cdot \delta_3 \end{aligned}\right\} \quad ^{20})$$

Daraus folgt:

$$M_1 = \frac{\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} - \frac{v_2 - v_1}{L} \cdot \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \tag{95}$$

$$M_2 = \frac{\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} - \frac{v_1 - v_2}{L} \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \tag{96}$$

und

$$H = \frac{e_1 + e_2 + \alpha t_1 + \beta t_2}{\delta_3} \tag{97}$$

Beim symmetrischen Bogen wird mit $\beta_1 = \alpha_2$ und $\beta_2 = \alpha_1$:

$$M_1 = \frac{\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} - \frac{v_2 - v_1}{L(\alpha_1 - \beta_1)} \tag{95'}$$

$$M_2 = \frac{\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} - \frac{v_1 - v_2}{L(\alpha_1 - \beta_1)} \tag{96'}$$

$$H = \frac{e_1 + e_2 + (\alpha + \beta)t}{\delta_3} \tag{97'}$$

---

[20]) Aus der Vorlesung von Prof. M. Ritter.

Beim Zweigelenkbogen erhalten wir nur die eine Gleichung:

$$H = \frac{e_1 + e_2}{\delta_3} \qquad (97'')$$

Um die Einflüsse der Bewegungen jedoch eingehender zu untersuchen, werden wir im folgenden jede Bewegungsart allein für sich betrachten.

3. Der Einfluß einer Wiederlagerdrehung

Wir nehmen jetzt an, allein das linke Widerlager habe sich um einen Winkel α gedreht.

a) Auftretende Kräfte und Momente

Aus den Gleichungen (95'), (96') und (97') folgt:

$$M_1 = \frac{\alpha\,\alpha_1}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} \qquad M_2 = -\frac{\alpha\,\beta_1}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} \qquad \text{und} \qquad H = \frac{\alpha\, t}{\delta_3}$$

Daraus ergibt sich

$$M_2 = -M_1 \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

(Momentenverlauf von M_1 und M_2 siehe Abb. 4.)

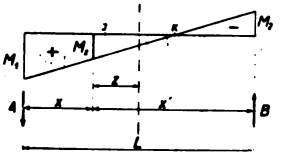


Abb. 4

Mit Benützung der Gleichung (8) folgt:

$$M_1 = \alpha \frac{EJ_s}{L} \cdot \frac{12(3+2n)}{(2+n)(2+3n)} = \alpha \frac{EJ_s}{L} \cdot r_1' \qquad (98)$$

und

$$M_2 = -\alpha \frac{EJ_s}{L} \cdot \frac{6(4+n)}{(2+n)(2+3n)} = -\alpha \frac{EJ_s}{L} \cdot r_2' \qquad (99)$$

ferner

$$H = \alpha \frac{c_0 f}{\frac{f^2 L}{EJ_s \lambda_\mu}} = \alpha \frac{EJ_s}{fL} \cdot c_0 \lambda_\mu \qquad (100)$$

Die Gleichung für das Biegungsmoment lautet dann

$$M = M_1 \frac{x'}{L} + M_2 \frac{x}{L} - H \cdot y$$

$$= \frac{\alpha E J_s}{2L}\left[(r_1' - r_2') + (r_1' + r_2')\,\eta - 2\lambda_\mu c_0 (c_0' - c'\eta^2 - c\eta^4)\right] \tag{101}$$

$$= \frac{\alpha E J_s}{2L}\left[\frac{6}{2+n} + \frac{30}{2+3n}\,\eta - 2\lambda_\mu c_0 (c_0' - c'\eta^2 - c\eta^4)\right] \tag{101'}$$

Man beachte hier, daß das Biegungsmoment umso größer ist, je größer α und EJ sind und je kleiner L ist.

b) Die Biegungslinie und Scheitelsenkung

Nach dem üblichen Verfahren erhalten wir für die Biegungslinie:

$$\delta = \frac{\alpha L}{480}\Big[60\,C_2 + 60\,\eta\,C_1 + 5\eta^2\,(2\lambda_\mu c_0 c_0' - r_1' + r_2')\,(6 - m\eta^2) - \eta^3\,(r_1' + r_2')\,(10 - 3m\eta^2) - 2\eta^4 \lambda_\mu c_0 c'\,(5 - 2m\eta^2) - \eta^6 \lambda_\mu c_0 c\left(4 - \frac{15}{7}\,m\eta^2\right)\Big] \tag{102}$$

worin

$$C_1 = -\frac{1}{2}\,(r_1' - 3r_2') + \frac{m}{12}\,(r_1' - 7r_2') \tag{103}$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\,(7r_1' - 11r_2') - \frac{m}{60}\,(13r_1' - 37r_2') - c_0 \lambda_\mu\left[\left(c_0' - \frac{c'}{6} - \frac{c}{15}\right) - m\left(\frac{c_0'}{6} - \frac{c'}{15} - \frac{c}{28}\right)\right] \tag{104}$$

Die Integrationskonstanten erhält man aus den Randbedingungen:

$$\left(\frac{d\delta}{dz}\right)_{z=-L_1} = 0, \qquad \delta_{z=L_1} = 0$$

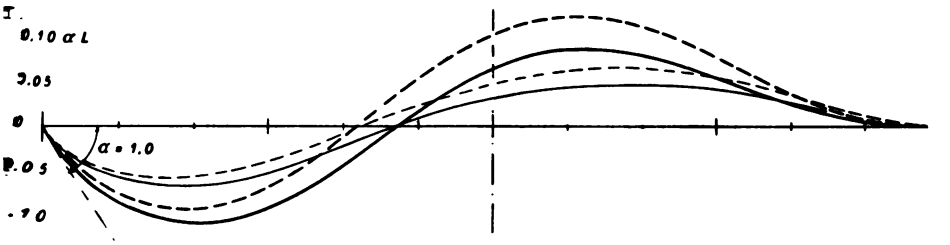
Die Scheitelsenkung läßt sich direkt aus der Gleichung (102) ermitteln:

$$\delta_s = \frac{\alpha L C_2}{8} \tag{105}$$

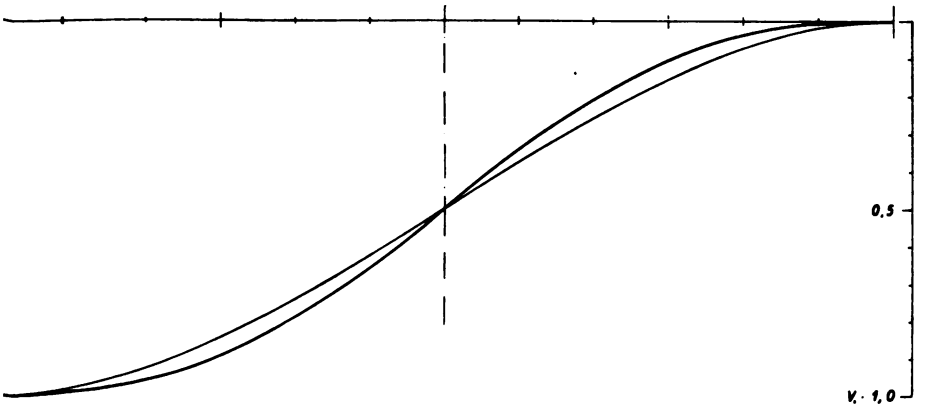
Da die Widerlagerdrehung überhaupt keinen Einfluß auf den Zweigelenkbogen hat, darf hier von dieser Bogenart nicht die Rede sein.

Tafel XII.

Die Biegungslinien des voll eingespannten Bogens infolge Drehung bzw. Senkung eines Widerlagers.



——— für $c = 0{,}0$, $n = 1{,}0$
——— für $c = 0{,}0$, $n = 0{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 1{,}0$
— — — für $c = 0{,}4$, $n = 0{,}0$



——— für $n = 1{,}0$, c beliebig
——— für $n = 0{,}0$, c beliebig

4. Der Einfluß einer horizontalen Verschiebung

Wir setzen voraus, daß das linke Widerlager um e_1 nach rechts verschoben ist und daß keine anderen Widerlagerbewegungen vorhanden sind.

Aus den Gleichungen (95′), (96′) und (97′) bekommen wir:

$$M_1 = M_2 = 0$$
$$H = \frac{e_1}{\delta_3} = \frac{e_1 EJ_s \lambda_\mu}{f^2 L} \text{ [21]} \qquad (106)$$

Somit lautet das auftretende Biegungsmoment:

$$M = -H \cdot y = -\frac{e_1 EJ_s \lambda_\mu}{fL} (c_0' - c'\eta^2 - c\eta^4) \qquad (107)$$

Man beachte, daß das Momentenbild demjenigen der Temperaturänderung ähnlich ist. H ist in beiden Fällen die einzige auftretende Kraft und hat hier den Wert $\frac{e_1}{L} \cdot \frac{EJ_s \lambda_\mu}{f^2}$ und dort den Wert $\omega t° \frac{EJ_s \lambda_\mu}{f^2}$. Wenn wir daher $\omega t°$ durch $\frac{e_1}{L}$ in den Gleichungen (92), (93) und (94) ersetzen, bekommen wir unmittelbar für die Biegungslinie infolge der Verschiebung e_1:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= -\frac{e_1 L}{8f} \lambda_\mu \left[C_2 - c_0'\eta^2 + \frac{c' + mc_0'}{6}\eta^4 + \frac{c - mc'}{15}\eta^6 - \frac{mc}{28}\eta^8\right] \\ \text{oder} \\ \delta &= -e_1 \frac{L}{4f} k_\mu \end{aligned}\right\} (108)$$

wobei $$C_2 = c_0' - \frac{c' + mc_0'}{6} - \frac{c - mc'}{15} + \frac{mc}{28}$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß der Bogen bei positivem e_1 (Verkürzung der Spannweite) sich hebt. Gewöhnlich ist e_1 negativ, d. h. die Spannweite verlängert sich mit dem Nachgeben der Widerlager. Der Verlauf der entstehenden Deformationen entspricht genau demjenigen, der in der Tafel XI dargestellt ist.

---

[21]) Die Gleichungen (106) bis (108) gelten (mit $c_0' = 1$) auch für den Zweigelenkbogen.

5. Der Einfluß einer Widerlagereinsenkung

Das linke Widerlager allein senke sich um v_1. Die Gleichungen (95′), (96′) und (97′) liefern in diesem Falle:

$$M_1 = \frac{v_1}{L(\alpha_1 - \beta_1)}$$

$$M_2 = \frac{-v_1}{L(\alpha_1 - \beta_1)} = -M_1$$

$$H = 0$$

Benützt man die Gleichung (8), so kann man schreiben

$$M_1 = \frac{30 v_1 EJ_s}{(2+3n)L^2} \tag{109}$$

Hier ist das Schnittmoment

$$M_z = M_1 \frac{z}{L_1} = \frac{30 v_1 EJ_s}{(2+3n)L^2} \cdot \frac{z}{L_1}$$

und daraus erhalten wir wie üblich die elastische Linie

$$\delta = \frac{v_1}{8(2+3n)} \left[4(2+3n) + 15(1+n)\eta - 10\eta^3 + 3(1-n)\eta^5\right] \tag{110}$$

Darin sind die Integrationskonstanten

$$C_1 = \frac{1+n}{4} \text{ und } C_2 = \frac{2+3n}{15}$$

enthalten.

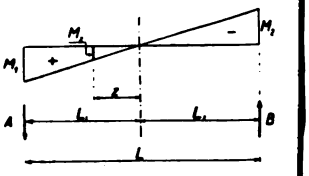


Abb. 5

Wir fassen in der nachstehenden Tabelle die Resultate der verschiedenen Widerlagerbewegungen zusammen.

Widerlagerbewegung des eingesp. Bogens	$M =$	$H =$	$\delta =$
Drehung α	$\alpha \cdot \frac{EJ_s}{L} \cdot F(n, c, \eta)$	$\alpha \cdot \frac{EJ_s}{f \cdot L} \cdot F(n, c)$	$\alpha \cdot L \cdot F(n, c, \eta)$
Verschiebung e	$\frac{e}{f} \cdot \frac{EJ_s}{L} \cdot F(n, c, \eta)$	$\frac{e}{f} \cdot \frac{EJ_s}{f \cdot L} \cdot F(n, c)$	$\frac{e}{f} \cdot L \cdot F(n, c, \eta)$
Einsenkung v	$\frac{v}{L} \cdot \frac{EJ_s}{L} \cdot F(n, \eta)$	0	$\frac{v}{L} \cdot L \cdot F(n, \eta)$

Diese Tabelle, und wie die Rechnung bestätigt, läßt erkennen, daß die horizontalen Verschiebungen viel gefährlicher als die vertikalen sind. Bei jeder Verschiebung sind H und M dem Quotienten $\frac{EJ_s}{L}$ proportional; somit sind steife und kurze Bogen gegen Widerlagerbewegungen besonders empfindlich.

G. Der Einfluß von c und n auf die Formänderungen

Um die Faktoren c und n richtig zu wählen, empfiehlt es sich, ihren Einfluß auf den Bogen zu untersuchen.

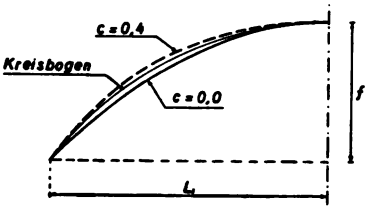


Abb. 6

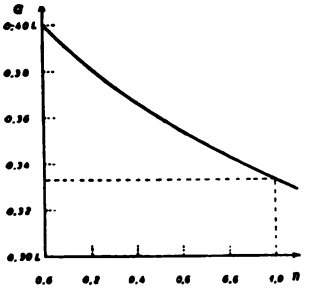


Abb. 8

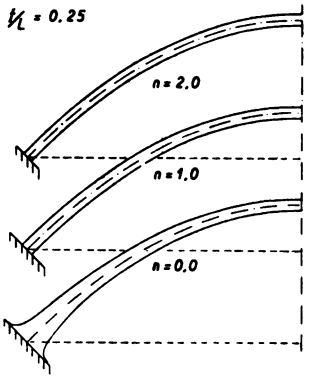


Abb. 7

Vor allem haben wir in Abb. 6 ein Bild, wie sich die Krümmung der Achse mit c ändert, und in Abb. 7, wie viel n den Verlauf der Querschnittshöhe vom Scheitel bis zum Kämpfer (bei konstanter Breite) beeinflußt. Die Wirkung von c und n auf die Größen t, λ und k sowie auf die Festpunktabstände a und b ist in den Tafeln II bis V sowie in Abb. 8 ersichtlich. Daraus folgt,

daß c und n die Momente und die Formänderungen stark beeinflussen.

Der Einfluß von c.

Die Momentenverteilung infolge des Eigengewichts ist von der Form der Bogenachse abhängig. Verschiedene Werte von c führen zu verschiedenen Momentenflächen, und bekanntlich versucht man denjenigen Wert von c zu bestimmen, der einen günstigen Verlauf der Grenzwertlinien für die Bogenmomente zur Folge hat.

Unter Verkehrslast finden wir aus den Tafeln VI bis IX, daß mit wachsendem c die Momente und Durchbiegungen des Bogens (voll eingespannt oder zweigelenkig) zunehmen, sobald sich die Last im mittleren Gebiet befindet, oder die Belastung eine gleichmäßig verteilte über den ganzen Bogen ist. Für $c = 0{,}4$ gegenüber $c = 0{,}0$ erhöhen sich die maximalen Momente bis ca. 60% und die Durchbiegungen bis ca. 90 %. Hingegen ist der Einfluß von c bei den Belastungen vom Kämpfer bis zum Viertel unbedeutend.

Bei Temperaturänderungen und Schwinden sowie bei Widerlagerverschiebungen des eingespannten Bogens vergrößert c den Horizontalschub. Somit vergrößern sich die Momente und die Durchbiegungen (Tafel XI). Für den Zweigelenkbogen wirkt die Zunahme von c ein wenig vorteilhafter.

Aus den obigen Feststellungen scheint es für den Bogen nicht zweckmäßig, ein großes c zu wählen.

Der Einfluß von n.

Aus den Tafeln VI und VIII sehen wir, daß mit abnehmenden n (d. h. je stärker das Trägheitsmoment gegen den Kämpfer zuwächst) die Momente im Scheitelgebiet ab- und im Kämpfergebiet zunehmen, und zwar für alle Einspannungsgrade und Belastungen. Das entspricht dem Castigliano'schen Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit bei statisch unbestimmten Systemen.

Folglich verursacht die Abnahme von n eine Verminderung der Durchbiegungen aller Punkte, und zwar umso mehr, je näher der Punkt am Kämpfer liegt (Tafeln VII und IX). Somit scheint ein eingespannter Bogen A mit $n = 0$ steifer zu sein als ein Bogen

B mit $n = 1$. Das stimmt ohne weiteres, wenn J_s beider Bogen gleich groß ist. Dieser Vergleich ist nicht ohne weiteres gerechtfertigt. Deshalb vergleichen wir in folgender Tabelle die Durchbiegungen des Bogens A mit denjenigen eines Bogens C mit $n = 1$, der dieselbe Breite, dasselbe f/L von 0,25 und denselben Kubikinhalt hat.

Maximale Durchbiegungen unter Einzellast $P = 1$
(Vergleichszahlen)

	Last im Scheitel		Last im Viertel		gleichm. verteilte Belastung	
	c=0	c=0,4	c=0	c=0,4	c=0	c=0,4
Bogen A mit $n = 0$	**0,60**	**1,06**	**0,87**	**0,80**	**0**	**0,125**
Bogen B mit $n = 1{,}0$ (gl. J_s wie Bogen A)	1,00	1,88	2,00	1,89	0	0,285
Bogen C mit $n = 1{,}0$ (gl. Volumen wie A)	**0,43**	**0,82**	**0,87**	**0,82**	**0**	**0,124**

Das Verhältnis J_s von C zu J_s von A oder B ist gleich 2,3 : 1. Die Zahl 2,3 ist variabel und hängt von der Größe f/L ab. μ ist vernachlässigt.

Daraus folgt, daß der Bogen C unter einer Belastung im mittleren Gebiet steifer ist als der Bogen A.

Bei Temperaturänderung und Schwinden sowie bei Widerlagerverschiebung finden wir aus den Gleichungen (90) und (106), daß H alle Momente und Deformationen verursacht und dem Produkt $\lambda \cdot J_s$ proportional ist. Der Vergleich der obigen drei Bogen gibt:

		$c = 0$	$c = 0{,}4$
Bogen $A: n = 0$, J_s	$\lambda \cdot J_s =$	**32,9** $\cdot J_s$	**43,2** $\cdot J_s$
Bogen $B: n = 1$, J_s	$=$	11,3 „	12,5 „
Bogen $C: n = 1$, $J_s' = 2{,}3 J_s$	$=$	**25,9** „	**28,8** „

Daraus folgt, daß ein kleines n größere Kräfte und Durchbiegungen ergibt (vergl. Tafel XI).

Eine ähnliche Behandlung des Zweigelenkbogens zeigt uns in folgender Tabelle, daß derjenige mit $J \cos\varphi =$ konstant in bezug auf die Steifigkeit keinen besonderen Vorteil aufweist.

Maximale Durchbiegungen unter Einzellast $P = 1$
(Vergleichszahlen)

	Last im Scheitel		Last im Viertel	
	$c = 0{,}0$	$c = 0{,}4$	$c = 0{,}0$	$c = 0{,}4$
Bogen A mit $n = 2{,}0$	**1,77**	**3,40**	**5,40**	**5,28**
Bogen B mit $n = 1{,}0$ und dems. J_s wie Bogen A	1,50	2,70	4,30	4,12
Bogen C mit $n = 1{,}0$ und gleichem Vol. wie A	**2,10**	**3,78**	**6,02**	**5,77**

Das Verhältnis J_s des Bogens C zu J_s des Bogens A oder $B = 1 : 1{,}4$.

Es ist somit festzustellen, daß es vorteilhaft ist, im Interesse der Steifigkeit und der Herabminderung des Einflusses aus Temperaturänderungen und eventuellen Widerlagerbewegungen, n möglichst groß zu wählen.

II. Teil

Zusammenwirken von Bogen und Aufbau

A. Einleitung

Eng verbunden mit dem elastischen Verhalten des Bogens ist das Zusammenwirken mit dem Aufbau. Man hat schon durch die vielen Belastungsversuche an Modellen sowie an ausgeführten Bogenbrücken nachgewiesen, daß der Aufbau zusammen mit dem Bogen wirkt, wenn die Brücke belastet ist. Dies erfolgt aus der Tatsache, daß der Aufbau sich mit dem Bogen senken muß. Da das normale Ausführungsverfahren den Bogen sein eigenes Gewicht zusammen mit dem Gewicht des Aufbaues tragen läßt, so kommt das Zusammenwirken bei den ständigen Lasten nicht in Frage.

Wir verfolgen bei der Behandlung dieses Zusammenwirkens nicht allein das Ziel, die Durchbiegungen eines versteiften Bogens analytisch zu ermitteln — und zwar für Probebelastungszwecke —, sondern hauptsächlich die wirklichen Kräfte, die auf den Bogen und auf den Fahrbahnträger wirken, festzustellen und dadurch *diese zwei Elemente entsprechend diesen Kräften richtig zu dimensionieren.*

Die Unkenntnis oder die Vernachlässigung dieses Zusammenwirkens in der Berechnung von gewölbten Brücken hat zur Folge, daß die Bogen über- und die Fahrbahnträger unterdimensioniert werden; und so müssen die Fahrbahnträger viel höhere Spannungen ertragen, die den Sicherheitsgrad vermindern und die in einigen Fällen bei der Fahrbahn bereits zu Rissen geführt haben. Da die rein analytische Berechnung des Zusammenwirkens sehr umfangreich und schwierig ist, hat man sich bei den wichtigen Brücken mit experimentellen Untersuchungen an Modellen ge-

holfen. Aus diesen konnte man sehr interessante Resultate gewinnen, die mit reiner analytischer Berechnung kaum erreichbar gewesen wären [1]).

Wir versuchen hier das Problem des Zusammenwirkens zu behandeln. Die im ersten Teil dieser Arbeit gemachten Untersuchungen werden uns helfen, die analytischen Berechnungen des Zusammenwirkens zu vereinfachen und zu verkürzen.

Beim vollen und hohlen Aufbau wirken zwei Faktoren mit, die die Spannung infolge Verkehrslast im Bogen stark reduzieren: die Lastverteilung durch die Längswände und die Auffüllung einerseits, das statische Zusammenwirken anderseits. Die statische Untersuchung der ersten zwei Faktoren ist sehr kompliziert und unklar. Bis jetzt können uns nur die Modellversuche ein zuverlässiges Bild der Spannungsverteilung geben. Hingegen ist, beim durchbrochenen Aufbau mit durchlaufendem Fahrbahnträger auf Stützen oder Querwänden, das Zusammenwirken der verschiedenen Bauteile bedeutend klarer, und die Elastizitätsbedingungen lassen sich leicht formulieren.

B. Das Zusammenwirken bei Verkehrslast

Für die Berechnung des Zusammenwirkens unter Verkehrslast stehen uns drei bekannte Berechnungsmethoden zur Verfügung sowie eine neue vierte Methode.

1. Die erste Methode [2])

Diese Methode stützt sich auf die Kenntnis der Theorie der Biegungslinie sowie der Theorie des durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen. In Abb. 9 bedeuten C_1, C_2, C_3 usw. die Auflagerdrücke des Balkens $A—B$ und gleichzeitig die Belastungen des Bogens infolge der Verkehrslasten auf der Fahr-

---

[1]) Vergl. Schaechterle, Bauingenieur, März 1938.
Wilson, Band 5 der Abhandlungen der I. V. B. H. 1938.
Jäger, Beton und Eisen, Juli 1936.

[2]) Die Grundlagen dieser Methode sind dem Repetitorium der Vorlesungen „Massive Brücken" von Prof. Dr. M. Ritter 1940 entnommen.

bahn; v_1, v_2, v_3 ... und v_1', v_2', v_3' ... die Einsenkungen der betreffenden Punkte im Balken bzw. im Bogen. Für den Balken können wir nach dem Superpositionsgesetz schreiben

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{10} + v_1 C_{11} + v_2 C_{12} + v_3 C_{13} + \ldots \\ C_2 &= C_{20} + v_1 C_{21} + v_2 C_{22} + v_3 C_{23} + \ldots \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{111}$$

wobei C_{10}, C_{20} ... die Auflagerdrücke des durchlaufenden Balkens auf festen Stützen infolge der Verkehrslast sind. Ferner bedeuten

C_{11} den Auflagerdruck C_1 wenn $v_1 = 1$ und $v_2 = v_3 = \ldots = 0$
C_{12} den Auflagerdruck C_1 wenn $v_2 = 1$ und $v_1 = v_3 = \ldots = 0$
usw.

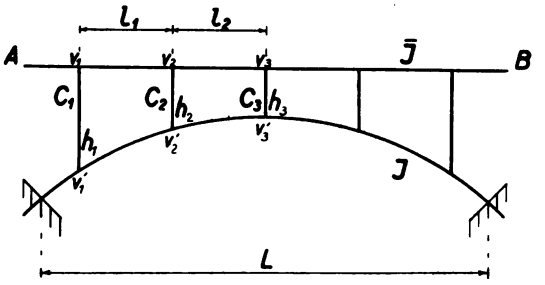


Abb. 9

Für den Bogen haben wir:

$$\begin{aligned} v_1' &= C_1 v_{11}' + C_2 v_{12}' + C_3 v_{13}' + \ldots \\ v_2' &= C_1 v_{21}' + C_2 v_{22}' + C_3 v_{23}' + \ldots \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{112}$$

Aus den Beziehungen zwischen Balken- und Bogensenkungen ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1' + \zeta_1 h_1 C_1 \\ v_2 &= v_2' + \zeta_2 h_2 C_2 \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{113}$$

wobei

$\zeta_1 = \dfrac{1}{F_{c_1} \cdot E}$ die Verkürzung der Stütze 1 pro Meter Höhe inf. $C_1 = 1$

$\zeta_2 = \dfrac{1}{F_{c_2} \cdot E}$ „ „ „ „ 2 „ „ „ „ $C_2 = 1$

usw.

Um obige Gleichungen lösen zu können, müssen wir zuerst die Werte von v'_{11}, v'_{12} usw. des Bogens, sowie die Werte C_{11}, C_{12} usw. des Versteifungsbalkens haben. Die v'-Werte erhalten wir unmittelbar aus den Gleichungen der Biegungslinien. Die C_{11}, C_{12} usw. gewinnen wir am besten nach der Festpunktmethode wie folgt:

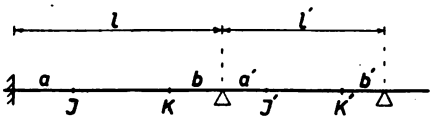


Abb. 10

Der Festpunktabstand a' der Öffnung l' des durchlaufenden Balkens auf festen, frei drehbaren Stützen (Abb. 10) ist durch die folgende Formel bestimmt:

$$a' = \frac{\alpha_2' \cdot l'}{\alpha_1' + \alpha_2' + \beta_2 - \frac{a}{l-a}\beta_1}$$

Analog: (114)

$$b = \frac{\beta_1 \cdot l}{\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'}\alpha_2'}$$

Für die erste Öffnung gilt:

$$a = \frac{\alpha_2 \, l}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon}$$

Wir bezeichnen jetzt mit m, n, o (Abb. 11) einen Teil der Stützpunkte des Fahrbahnträgers, der auf elastisch senkbaren Stützen gelagert ist. Die Stütze n allein habe sich um den Betrag v gesenkt. Wir wollen zunächst die im System dadurch entstehenden Biegungsmomente ausrechnen. Nach der Theorie des durchlaufenden Balkens auf senkbaren Stützen [3]) bekommen wir:

$$M_2 = v \frac{\frac{1+\varepsilon_{b'}/\varepsilon_s}{l-a} + \frac{1}{l'-b'}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{b'} + \frac{\varepsilon_a \cdot \varepsilon_{b'}}{\varepsilon_s}}, \qquad M_1' = v \frac{\frac{1+\varepsilon_a/\varepsilon_s}{l'-b'} + \frac{1}{l-a}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{b'} + \frac{\varepsilon_a \cdot \varepsilon_{b'}}{\varepsilon_s}} \qquad (115)$$

[3]) Vergl. Prof. M. Ritter: Abhandlungen des I. V. B. H., Band 4, 1936.

und

$$M_1 = -\frac{a}{l-a}\left(M_2 + \frac{v}{\alpha_2 l}\right), \quad M_2' = -\frac{b'}{l'-b'}\left(M_1' + \frac{v}{\beta_1' \cdot l'}\right) \quad (116)$$

wobei

$\varepsilon_a = \beta_2 - \frac{a}{l-a}\beta_1 =$ Einspannungsmaß von l bei n

$\varepsilon_b' = \alpha_1' - \frac{b'}{l'-b'}\alpha_2' =$ „ „ l' „ n

$\varepsilon_s =$ Einspannungsmaß des Stützenkopfes.

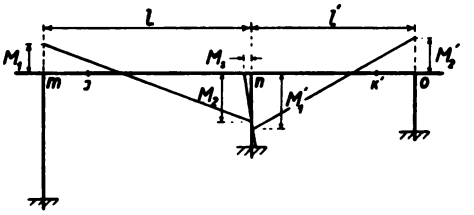


Abb. 11

Gewöhnlich ist die Steifigkeit der Stützen in der Tägerebene gering, und deshalb kann man eine Vereinfachung erzielen dadurch, daß man diese Stützen als Pendelstützen betrachtet. Sehr kurze Stützen wird man eher als steif annehmen.

Für Pendelstützen ist $\varepsilon_s = \infty$; daraus folgt

$$M_2 = \nu \frac{\frac{1}{l-a} + \frac{1}{l'-b'}}{\varepsilon_a + \varepsilon_b'} = M_1' \quad (115')$$

Für sehr steife Stützen ist $\varepsilon_s = 0$; daraus ergibt sich

$$M_2 = \frac{\nu}{\varepsilon_a (l-a)}, \quad M_1' = \frac{\nu}{\varepsilon_b' (l'-b')} \quad (115'')$$

Sind M_1 und M_2' bestimmt, so lassen sich nach dem Prinzip der Festpunkte alle weiteren Stützpunktmomente bestimmen. Hat man sie alle berechnet, so kann man leicht die Auflagerdrücke nach der Gleichung bestimmen:

$$C_n = \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{M_2' - M_1'}{l'} \quad (117)$$

Prof. M. Ritter stellt in seinem Werk „Der durchlaufende Balken auf nachgiebigen Stützen“ [4]) fest, daß man — abnormale Fälle ausgenommen — bei elastisch drehbaren Stützen keine wesentlich abweichenden Auflagerdrücke erhält, wenn man zur Vereinfachung näherungsweise nach Gleichung (115′) bzw. (115″) rechnet.

Damit haben wir alle Angaben für die Berechnung der Gleichungssysteme (111), (112) und (113). Daraus erhalten wir die Auflagerdrücke C_1, C_2 usw., und somit können wir die Momente, Spannungen und Durchbiegungen des Bogens sowie des Versteifungsbalkens bestimmen.

Diese Methode hat den Vorteil, daß man sie bei allen Einspannungsgraden des Bogens sowie des Balkens anwenden kann. Sie ist sehr übersichtlich, und ihre Elastizitätsgleichungen lassen sich einfach und rasch formulieren. Ihre Anwendung ist bei noch verfeinerter Berechnung des Zusammenwirkens möglich, wenn man den Einfluß der Steifigkeit der Knotenpunkte sowie den Einfluß der horizontalen Verschiebungen der Bogen- und der Balkenknotenpunkte berücksichtigt. Somit ist diese Methode für die Anwendung auf die üblichen Bogenbrücken mit wenigen Fahrbahnstützen sehr wertvoll. Nimmt die Anzahl der Stützen zu, so ist diese Methode nicht sehr geeignet, da in jeder Elastizitätsgleichung alle Unbekannten erscheinen, deren Zahl gewöhnlich mit derjenigen der Stützen übereinstimmt. Dadurch wird die Auflösung des Gleichungssystems mühsam, und eine große Genauigkeit in der Berechnung ist dann erforderlich.

2. Die zweite Methode

Diese Methode besitzt den Vorteil, daß hier in jeder Elastizitätsgleichung nur drei Unbekannte erscheinen, und somit lassen sie sich rasch ausrechnen. Für die Berechnung von polygonalen Bögen [5]), wo das Trägheitsmoment des Bogens feldweise konstant

---

[4]) Siehe Band 4 der I. V. B. H. - Abhandlungen, 1936.

[5]) In der Literatur manchmal als eingespannte versteifte Stabbogen bezeichnet.

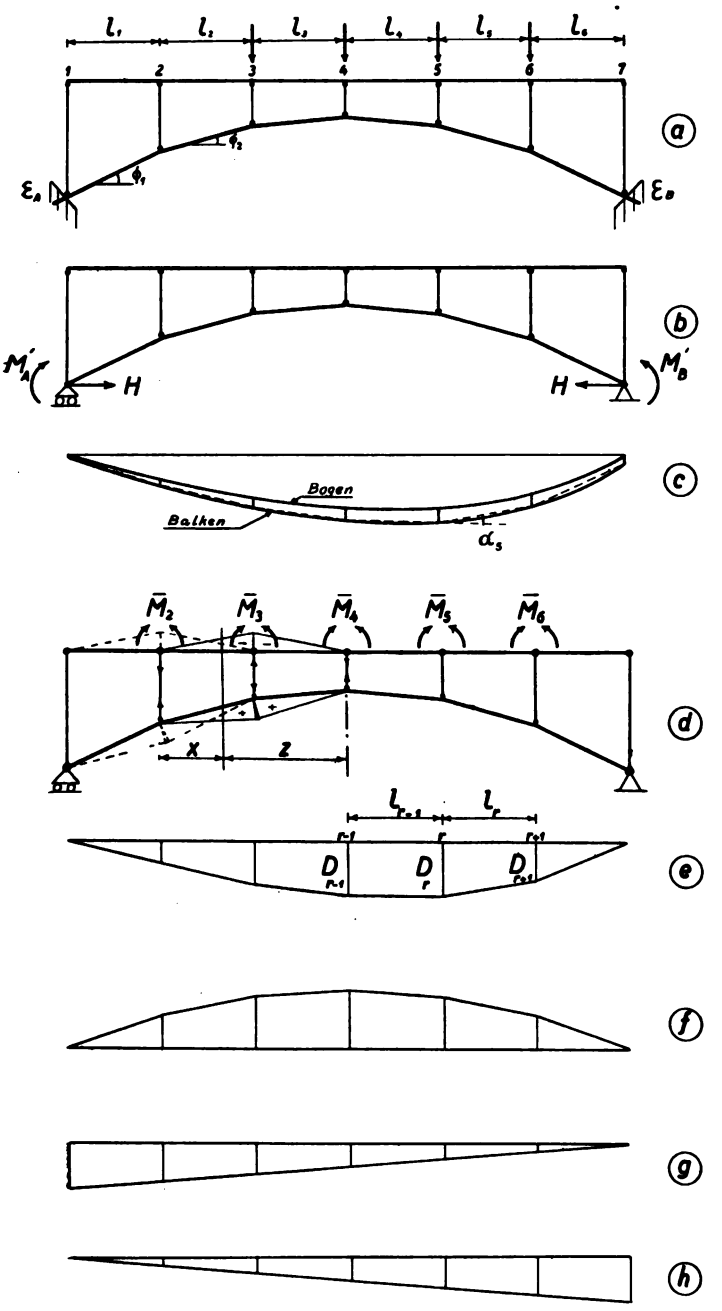


Abb. 12

bleibt (vergl. Abb. 12a) ist diese Methode sehr bequem. Sie läßt sich prinzipiell auch für andere Bogenarten anwenden, jedoch mit größerem Berechnungsaufwand. Man kann diese Methode näherungsweise für flache Bogen mit großem n und mit großer Anzahl Stützen gleich wie für polygonale Bogen anwenden; der Fehler ist klein. Bei all ihren Anwendungen muß die Annahme von beidseitig gelenkig angeschlossenen Stützen getroffen werden.

Der Grundgedanke dieser Methode ist in der Literatur bereits angegeben [6]). Sie wurde jedoch nur für besondere Fälle angewendet. Wir werden diese Methode in sehr einfacher Weise darstellen, und zwar für die Berechnung eines beliebig eingespannten polygonalen Bogens, dessen Trägheitsmoment in jedem Feld konstant bleibt. Danach werden wir die nötigen Änderungen für die Berechnung anderer Bogenarten besprechen.

Die Einspannungsgrade des Bogens an seinen Enden seien ε_A und ε_B. Wir führen zwei Grundsysteme ein. Im Grundsystem I wandeln wir den Bogen in einen einfachen Balken um und führen die unbekannten äußeren Kräfte M_A', M_B' und H [7]) als überzählige Größen ein (Abb. 12b). Das zweite Grundsystem erhalten wir aus dem ersten, indem wir über allen Stützen im Balken Gelenke einschalten (Abb. 12d). Als überzählige Größen haben wir die Momente $\bar{M}_2, \bar{M}_3$ usw. Dieses Grundsystem ist statisch bestimmt.

Die Berechnung zerfällt in folgende Stufen:

Erste Stufe: *Bestimmung der Momente im Grundsystem I infolge Belastung.*

Infolge Verkehrslast erhält nur der Bogen (im Grundsystem II als einfacher Balken) das gesamte Biegungsmoment. Die überzählige Momente $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ usw. sind so zu ermitteln, daß die Biegungslinie des Balkens stetig verläuft. Die Biegungslinie des Balkens hängt von derjenigen des Bogens und von der Nachgiebig-

[6]) Vergl. a) Dr. Wanke: Melan-Festschrift 1923.
b) Prof. Dr. Stüssi: Schweiz. Bauzeitung, Februar 1937.
c) Dr. Stein: Der Stahlbau, Juni 1939.

[7]) In diesem Teil bezeichnen wir die Momente M_1 und M_2 von Abb. 2 mit M_A und M_B, und die Momente M_1' und M_2' mit M_A' und M_B'. Alle Balkenmomente sind mit $\bar{M}$ bezeichnet.

keit der Stützen ab. (Vergl. Abb. 12 c). Somit müssen diese Elemente in die Berechnung einbezogen werden.

Ein Balkenmoment, sagen wir $\bar{M}_3$, verursacht im gesamten Grundsystem II nur die Kräfte und Momente, die in Abb. 12 d voll ausgezogen dargestellt sind, und zwar nur in den zwei benachbarten Feldern. Dieses Moment gilt als positiv, wenn es im Bogen ein positives Moment erzeugt[8]). Wir gelangen somit zu den folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \bar{M}_2 \cdot \alpha_{22} + \bar{M}_3 \cdot \alpha_{23} + \alpha_{20} = 0 \text{ [9]}) \\
\alpha_3 &= \bar{M}_2 \cdot \alpha_{32} + \bar{M}_3 \cdot \alpha_{33} + \bar{M}_4 \cdot \alpha_{34} + \alpha_{30} = 0 \\
\alpha_4 &= \bar{M}_3 \cdot \alpha_{43} + \bar{M}_4 \cdot \alpha_{44} + \bar{M}_5 \cdot \alpha_{45} + \alpha_{40} = 0 \qquad (118)
\end{aligned}$$

usw.

wobei

$$\alpha_{22} = \int \frac{M_2^2\, ds}{EJ} + \int \frac{N_2^2\, ds}{EF} + \int \frac{Q_2^2\, ds}{GF'}$$

$$\alpha_{23} = \int \frac{M_2 M_3\, ds}{EJ} + \int \frac{N_2 N_3\, ds}{EF} + \int \frac{Q_2 Q_3\, ds}{GF'}$$

usw.

Das Integral umfaßt alle Glieder des Systems. Unter M_r, N_r und und Q_r versteht man das Moment, die Normalkraft und die Querkraft im Element ds infolge $M_r = 1$ im Punkt r usw. Der Einfluß der Querkraft ist sehr klein und darf ohne weiteres vernachlässigt werden; derjenige der Normalkraft erstreckt sich nur auf die Stützen; er darf unter Umständen auch vernachlässigt werden[10]).

Das Belastungsglied α_{r0} (vergl. Abb. 12 e) läßt sich wie folgt auswerten:

$$\alpha_{r0} = \frac{D_{r-1}\, l_{r-1} + 2 D_r\, l_{r-1}}{6 EJ_{r-1} \cos \varphi_{r-1}} + \frac{2 D_r l_r + D_{r+1}\, l_r}{6 EJ_r \cos \varphi_r} \qquad (119)$$

---

[8]) Dabei erzeugt es im Balken selbst eine negative Momentenfläche. Deshalb muß das Vorzeichen von $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ usw. bei der Bestimmung der endgültigen Momentenfläche des Balkens geändert werden.

[9]) α = der Unstetigkeitswinkel der Biegungslinie des Balkens über jeder Stütze im G. S. II infolge der Gelenke (Abb. 12 c).

[10]) Darüber siehe später unter 5. Einfluß der Elastizität der Stützen.

Sind alle Felder gleich groß, und kann man den Einfluß der Normal- und Querkräfte vernachlässigen, so erhält man folgende einfache Beziehungen:

$$\alpha_{22} = \frac{4l}{6E\bar{J}} + \frac{2l}{6EJ_1 \cos\varphi_1} + \frac{2l}{6EJ_2 \cos\varphi_2}$$

$$\alpha_{23} = \frac{l}{6E\bar{J}} + \frac{l}{6EJ_2 \cos\varphi_2}$$

usw.

wobei $\bar{J}$ = das konstante Trägheitsmoment des Balkens

J_1, J_2 = das Trägheitsmoment des Bogens im Feld 1, bzw. 2.

Setzt man $\frac{\bar{J}}{J_1 \cos\varphi_1} = \nu_1$ und $\frac{\bar{J}}{J_2 \cos\varphi_2} = \nu_2$ usw., so erhalten wir aus den Gleichungen (118):

$$4\bar{M}_2\left(1+\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)+\bar{M}_3(1+\nu_2)+ \qquad 4D_2\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+D_3\nu_2=0$$

$$\bar{M}_2(1+\nu_2)+4\bar{M}_3\left(1+\frac{\nu_2+\nu_3}{2}\right)+\bar{M}_4(1+\nu_3)+D_2\nu_2+4D_3\frac{\nu_2+\nu_3}{2}+D_4\nu_3=0$$

$$\bar{M}_3(1+\nu_3)+4\bar{M}_4\left(1+\frac{\nu_3+\nu_4}{2}\right)+\bar{M}_5(1+\nu_4)+D_3\nu_3+4D_4\frac{\nu_3+\nu_4}{2}+D_5\nu_4=0$$

usw. (118')

Aus diesen Gleichungen bekommen wir die Balkenmomente und daraus die Bogenmomente des Grundsystems I infolge der Belastung.

Zweite Stufe: *Ermittlung der Momente im Grundsystem I infolge H.*

Wir denken uns, daß auf das Grundsystem I nur ein Horizontalschub von einer bestimmten Größe H wirkt. Um die entstehenden Momente zu berechnen, kehren wir zum Grundsystem II zurück. Das gesamte Moment M_0 von der Größe $-H \cdot y$ (Abb. 12 f) erhält jetzt der Bogen. Genau wie unter Verkehrslast können wir nach den Gleichungen (118) oder (118') mit dem Einsetzen der neuen Belastungsglieder die Momente im Balken sowie die reduzierten Momente im Bogen, und zwar im System I, ausrechnen.

Dritte und vierte Stufe: *Berechnung der Momente im Grundsystem I infolge M_A', bzw. M_B'.*

Das M_0-Diagramm ist hier ein Dreieck (vergl. Abb. 12g—h). Mit demselben Verfahren wie früher erhält man die gewünschten Momente infolge M_A' und analog infolge M_B'.

Fünfte Stufe: *Bestimmung der Größen M_A', M_B' und H.*

Die Superposition der Momente aus den Berechnungsstufen 1 bis 4 gibt uns die endgültigen Momente im Balken sowie im Bogen, jedoch zum Teil als Funktion von M_A', M_B' und H. Zur Bestimmung dieser drei Größen benützen wir folgende Elastizitätsbedingungen des Bogens:

$$\alpha = -\varepsilon_A \cdot M_A', \qquad \beta = -\varepsilon_B \cdot M_B' \qquad \delta = 0$$

Die Arbeitsgleichung liefert uns die Werte von α, β und δ:

$$\alpha = \int \frac{M_e (M_A')\, ds}{EJ} \qquad \beta = \int \frac{M_e (M_B')\, ds}{EJ} \qquad \delta = \int \frac{M_e (M_H')\, ds}{EJ}$$

wobei

M_e = das endgültige Moment im Bogenelement ds
(M_A') = das Moment im Bogen als einfacher Balken infolge $M_A' = 1$
(M_B') = „ „ „ „ „ „ „ „ $M_B' = 1$
(M_H') = „ „ „ „ „ „ „ „ $H = 1$

Sind die Größen M_A', M_B' und H bestimmt, so können wir die endgültigen Momente und Kräfte im gesamten Tragwerk in Zahlenwerten erhalten.

Anwendung der Methode auf gewöhnliche Bogenarten.

Wenn wir diese Methode auf einen parabolischen Bogen anwenden wollen, so wird die Lösung schwieriger und länger. Wegen der Veränderlichkeit des Bogen-Trägheitsmoments nach dem Potenzgesetz wird die Berechnung der Größen α_{22}, α_{23} usw., sowie α_{20}, α_{30} ... bei jeder Berechnungsstufe viel komplizierter. Auch muß die Auswertung der Integrale bei der Berechnung von α, β und δ in der fünften Berechnungsstufe feldweise durchgeführt werden, d. h. jedes Integral zerfällt in eine Summe von Integralen.

Als Beispiel berechnen wir im folgenden den Wert von α_{23} aus, unter der Voraussetzung, daß der Balken 6 gleiche Öffnungen besitzt und daß wir die Normal- und Querkräfte vernachlässigen (vergl. Abb. 12 d).

$$\alpha_{23} = \alpha_{23\,Balken} + \alpha_{23\,Bogen}$$

$$\alpha_{23\,(Balken)} = \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3\, ds}{E\bar{J}} = \int_{x=0}^{x=l} \left[\frac{-(l-x)}{l}\right] \frac{(-x)}{l} \cdot \frac{dx}{E\bar{J}} = \frac{l}{6E\bar{J}}$$

$$\alpha_{23\,(Bogen)} = \int M_2 M_3 \frac{ds}{EJ}$$

$$= \int_{z=l}^{z=2l} \frac{z-l}{l} \cdot \frac{2l-z}{l} \cdot \frac{dz}{EJ_s} \cdot \left(1 - m\frac{z^2}{L_1^2}\right)$$

$$= \frac{l}{6EJ_s}\,[1 + \zeta_2^{23} m] \quad \text{worin} \quad \zeta_2^{23} = -\frac{23}{90} = \text{eine Zahl.}$$

Daraus wird:

$$\alpha_{23} = \frac{l}{6E\bar{J}} + \frac{l}{6EJ_s}\,[1 + \zeta_2^{23} m] = \frac{l}{6E\bar{J}}\,[1 + \nu(1 + m\zeta_2^{23})]$$

Dabei ist $\nu = \dfrac{\bar{J}}{J_s}$ und ζ_2^{23} der Beiwert für den Winkel α_{23} im Feld 2.

Wir können somit die Gleichungen (118′) in folgender allgemeiner Form schreiben.

$$\begin{array}{lllll}
 & 0 & +4M_2\left[1+\nu\left(1+m\dfrac{\zeta_1^{22}+\zeta_2^{22}}{2}\right)\right] & +M_3\,[1+\nu(1+m\zeta_2^{23})] & \\
+ & 0 & +4D_2 \cdot \nu\left(1+m\dfrac{\zeta_1^{22}+\zeta_2^{22}}{2}\right) & +D_3 \cdot \nu(1+m\zeta_2^{23}) = 0 & \\
M_2\,[1+\nu(1+m\zeta_2^{32})] & +4M_3\left[1+\nu\left(1+m\dfrac{\zeta_2^{33}+\zeta_3^{33}}{2}\right)\right] & +M_4\,[1+\nu(1+m\zeta_3^{34})] & & \\
+\ D_2\,\nu(1+m\zeta_2^{32}) & +4D_3 \cdot \nu\left(1+m\dfrac{\zeta_2^{33}+\zeta_3^{33}}{2}\right) & +D_4 \cdot \nu(1+m\zeta_3^{34}) = 0 & & \\
\text{usw.} & & & & (118'')
\end{array}$$

3. Die dritte Methode *(Eine Näherungsmethode)*

Diese Methode ist sehr einfach. Sie stützt sich auf drei Annahmen:

1. Die Stützen seien einander unendlich nahe.
2. Die Stützen seien starr und beidseitig gelenkig angeschlossen.
3. Der Einspannungsgrad des Balkens sei demjenigen des Bogens gleich.

Als Folge erhalten der Balken und der Bogen genau die gleichen Biegungslinien[11]). Demnach wird:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ\cos\varphi} = -\frac{\bar{M}}{E\bar{J}} \quad \text{(vergl. Abb. 13)}$$

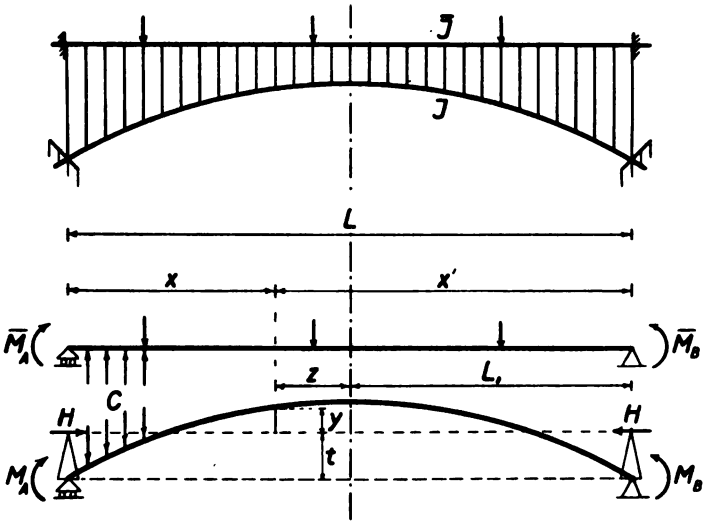


Abb. 13

Wir nehmen an, $\bar{J}$ des Versteifungsbalkens sei konstant und J des Bogens entspreche dem Potenzgesetz. Es folgt daraus, daß in jedem Schnitt

---

[11]) Tatsächlich sind diese zwei Biegungslinien im allgemeinen einander sehr verwandt, aber nicht genau gleich. Daher gibt uns diese Methode nur Näherungsresultate.

$$\frac{\bar{M}}{M} = \frac{\bar{J}}{J\cos\varphi} = \frac{\bar{J}}{J_s}(1 - m\eta^2) = d \qquad (120)$$

Für die Kämpfer erhält man

$$\frac{\bar{M}'_A}{M'_A} = \frac{\bar{M}_A}{M_A + Ht} = \frac{\bar{M}_B}{M_B + Ht} = \frac{\bar{J}}{J_K \cos\varphi_K} = d_K$$

Da unser Tragsystem aus einem Bogen und einem Balken besteht, die immer dieselbe Biegungslinie haben, liegt der Gedanke nahe, ob man dieses System mit einem gedachten unversteiften Bogen ersetzen dürfe, dessen Steifigkeit bei jedem Schnitt gleich der Summe der Steifigkeiten von Bogen und Balken ist. Es wäre somit

E^*J^* des Ersatzbogens $= EJ + \dfrac{\bar{E}\bar{J}}{\cos\varphi}$ entlang der Bogenachse,

oder $E^*J^*\cos\varphi = EJ\cos\varphi + \bar{E}\bar{J}$ entlang der Balkenachse,

und wenn E im Balken und im Bogen gleich sind, würde:

$$J^* = J + \frac{\bar{J}}{\cos\varphi}$$

Dieser Ersatzbogen würde dann bei jedem Schnitt ein Moment erhalten, das der Summe der Momente in beiden, Bogen und Balken, gleich ist. Das heißt

$$M^* = M + \bar{M} \qquad (121)$$

Aus den Gleichungen (120) und (121) erhalten wir folgende einfache Beziehungen für die Schnittmomente:

$$M = M^* \frac{1}{1+d}, \qquad \bar{M} = M^* \frac{d}{1+d} \qquad (122)$$

Dieser Gedanke ist einleuchtend. Einen analytischen Beweis gibt uns Prof. Dr. M. Ritter wie folgt[12]):

Man zerlegt das Gebilde in zwei einfache Balken wie in Abb. 13. Das Moment im Versteifungsbalken beträgt:

$$\bar{M} = M_0 - M_C + \bar{M}_A \cdot \frac{x'}{L} + \bar{M}_B \cdot \frac{x}{L}$$

darin ist M_0 das Moment des einfachen Balkens und M_C das Moment der von den Stützen auf den Balken wirkenden Kräfte.

[12]) Aus Manuskript.

Das Moment im Bogen beträgt:

$$M = M_C + M_A \frac{x'}{L} + M_B \frac{x}{L} - H \cdot y$$

Durch Addition läßt sich der unbekannte Wert M_C eliminieren, und es ergibt sich:

$$M + \bar{M} = M^* = M_0 + (M_A + \bar{M}_A) \frac{x'}{L} + (M_B + \bar{M}_B) \frac{x}{L} - H \cdot y$$

oder $$M^* = M_0 + M_A^* \frac{x'}{L} + M_B^* \frac{x}{L} - H \cdot y$$

Die Elastizitätsgleichungen für den Bogen nach Bresse lauten:

$$\alpha = \int M \frac{x'}{L} dw = 0, \qquad \beta = \int M \frac{x}{L} dw = 0,$$

$$\Delta L = \int My \, dw - \int N \cos\varphi \, dv = 0$$

Darin bezeichnet $dw = \frac{ds}{EJ}$ und $dv = \frac{ds}{EF}$

Setzt man $H = N\cos\varphi$ und $M = M^* \frac{1}{1+d}$

so wird $\int M^* x' dw^* = 0$, $\int M^* x \, dw^* = 0$, $\int M^* y \, dw^* - H \int dv = 0$

Darin ist $dw^* = dw \frac{1}{1+d}$. Durch Einsetzen des Ausdruckes für M^* folgen die Gleichungen:

$$\int M_0 x' dw^* + \frac{M_A^*}{L} \int x'^2 dw^* + \frac{M_B^*}{L} \int x x' dw^* - H \int x' y \, dw^* = 0$$

$$\int M_0 x \, dw^* + \frac{M_A^*}{L} \int x' x \, dw^* + \frac{M_B^*}{L} \int x^2 dw^* - H \int x y \, dw^* = 0$$

$$\int M_0 y \, dw^* + \frac{M_A^*}{L} \int x' y \, dw^* + \frac{M_B^*}{L} \int x y \, dw^* - H \int y^2 dw^* - H \int dv = 0$$

Dies sind die Elastizitätsgleichungen eines gedachten unversteiften Bogens, bei dem dw durch dw^* ersetzt ist. Es ist demnach

$$dw^* = \frac{ds}{EJ^*} = dw \frac{1}{1+d} = \frac{ds}{EJ} \frac{1}{1 + \frac{J}{J\cos\varphi}} = \frac{ds}{E\left(J + \frac{J}{\cos\varphi}\right)}$$

oder $$J^* = J + \frac{\bar{J}}{\cos\varphi}$$

Nach der Berechnung dieses gedachten Ersatzbogens nach dem üblichen Verfahren werden die überzähligen Größen M_A^*, M_B^* und H und damit die Schnittmomente M^* bestimmt. Die Momente im Bogen und Balken ergeben sich somit leicht aus Gleichung (122).

Bei Aufbauten mit beschränkter Stützenzahl wird diese Näherungsmethode für den Balken so angewendet, daß man mit ihr nur die Stützenmomente des Fahrbahnträgers ermittelt und die Momente zwischen den Stützen geradlinig variieren läßt. Die so gewonnene Momentenfläche wird dann der Momentenfläche bei fester Stützung infolge Belastung überlagert.

Der Ersatzbogen soll dieselbe Form haben wie der versteifte, jedoch ist der Faktor n^* verschieden. Falls der versteifte Bogen dem Potenzgesetz entspricht, so wird n^* bei konstantem $\bar{J}$ in der Regel größer als n sein, und seine Größe wird vom Scheitel bis zum Kämpfer ein wenig variieren, d. h. das Potenzgesetz gilt streng genommen nicht. Man kann jedoch, ohne einen großen Fehler zu begehen, einen mittleren Wert n^* für die Berechnung annehmen.

Für einen Schnitt η wird

$$J^* \cos\varphi = J\cos\varphi + \bar{J} = \frac{J_s}{1-(1-n)\eta^2} + \bar{J}$$

$$= \frac{J_s^*}{1-(1-n^*)\eta^2} = \frac{J_s + \bar{J}}{1-(1-n^*)\eta^2}$$

oder $$n^* = 1 - \frac{1}{\eta^2}\left[1 - \frac{(J_s + \bar{J})(1 - m\eta^2)}{J_s + \bar{J}(1 - m\eta^2)}\right] \qquad (123)$$

Darin ist $$m = 1 - n$$

Beim Kämpfer ist $\eta = 1$ und somit wird

$$n^* = \frac{J_s + \bar{J}}{\frac{J_s}{n} + \bar{J}}$$

Die Veränderlichkeit von n^* wird umso kleiner, desto näher n bei 1 liegt, oder desto kleiner J_s im Verhältnis zu $\bar{J}$ ist.

Einen Sonderfall erhalten wir bei $n = 1$. Es ergibt sich

$$n^* = 1 - \frac{1}{\eta^2}\left[1 - \frac{(J_s + \bar{J})(1-0)}{J_s + \bar{J}(1-0)}\right] = 1$$

Somit wird das Moment im Ersatzbogen gleich demjenigen des Bogens, wenn er unversteift wäre.

Die Näherungsmethode liefert uns bereits die Balken- und Bogenmomente, ohne daß wir uns mit den Kräften in den Stützen beschäftigen. Es ist aber interessant, sich ein Bild über diese Kräfte zu machen. Dafür betrachten wir den folgenden einfachen Fall:

Balken und Bogen eingespannt, Einzellast in der Mitte,

$$\bar{J} = J_s, \qquad n = 1, \qquad c = 0$$

Für den Ersatzbogen (siehe Abb. 14):

$$n^* = 1, \qquad a^* = b^* = \frac{L}{3}$$

Aus Gleichung (42):

$$\cdot^* = \frac{5}{16} \cdot \frac{n^* + 5}{n^* + 4} \cdot \frac{a^*}{L} = \frac{1}{8}, \quad \text{noch} \quad c_0' = \frac{1}{3},\ \lambda = \frac{45}{4},\ k = \frac{15}{16}$$

Gleichung (44) gibt:

$$M^* = \frac{PL}{4}\left[\frac{3}{16} - \eta + \frac{15}{16}\eta^2\right] \quad \text{(Die Gleichung einer Parabel)}$$

Daraus:

$$M^*_{K\ddot{a}mpfer} = \quad 2\,\frac{PL}{64}$$

$$M^*_{Viertel} = -\frac{5}{4}\,\frac{PL}{64}$$

$$M^*_{Scheitel} = \quad 3\,\frac{PL}{64}$$

M^* verteilt sich zwischen Bogen und Balken gleich.

Demnach ist im Kämpferschnitt $M_k = \bar{M}_k = +\ 1 \cdot \frac{PL}{64}$

im Viertelschnitt $M_v = \bar{M}_v = -\frac{5}{8} \cdot \frac{PL}{64}$

im Scheitelschnitt $M_s = \bar{M}_s = +\frac{3}{2} \cdot \frac{PL}{64}$

Aus dem früheren analytischen Beweis ersieht man, daß H^* des Ersatzbogens gleich H des versteiften Bogens ist. Somit wird man sich fragen, ob es möglich ist, daß $H = H^*$ und zugleich $M = \frac{1}{2} M^*$ ist. Der Verlauf der Kräfte des Systems in Abbildung 14 erklärt uns diese Tatsache.

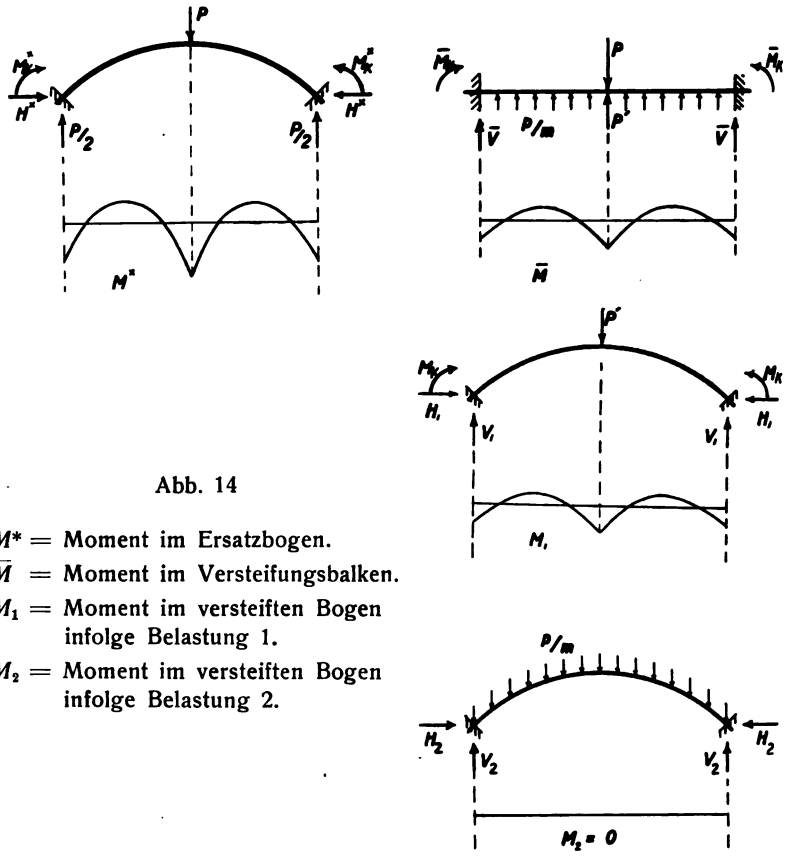


Abb. 14

M^* = Moment im Ersatzbogen.
$\bar{M}$ = Moment im Versteifungsbalken.
M_1 = Moment im versteiften Bogen infolge Belastung 1.
M_2 = Moment im versteiften Bogen infolge Belastung 2.

Da die Gleichung für M^* vom Scheitel bis zum Kämpfer eine Parabel ist, so wird die Gleichung für $\bar{M}$ auch eine Parabel, d. h. der Balken trägt eine gleichmäßig verteilte Last p pro Meter. Die Unstetigkeit im Verlauf der Momentenkurve des Bogens beim Scheitel bedingt die Last P'. Wir betrachten jetzt den Balken einzeln:

$$p = \frac{P - P' - 2\bar{V}}{L}$$

$$\bar{M}_v = \bar{M}_k + \bar{V}\frac{L}{4} + \frac{pL^2}{32} = -\frac{5}{8}\frac{PL}{64}$$

oder
$$2P' - 12\bar{V} = \frac{29}{8}P \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{M}_s = \bar{M}_k + \bar{V}\frac{L}{2} + p\frac{L^2}{8} = \frac{3}{2}\frac{PL}{64}$$

oder
$$8P' - 16\bar{V} = \frac{15}{2}P \qquad \text{(b)}$$

Aus (a) und (b) ergibt sich:

$$P' = \frac{P}{2}, \qquad \bar{V} = -\frac{7}{32}P, \qquad p = \frac{45}{48}\frac{P}{L}$$

Für den Bogen haben wir zwei Belastungen.

Belastung 1: die Last $P' = \frac{P}{2}$.

Diese Last gibt ohne weiteres das Moment M des Bogens und folgende Widerlagerkräfte:

$$V_1 = \frac{P'}{2} = \frac{P}{4}, \qquad H_1 = \frac{1}{2}H^* = \frac{15}{32}\frac{PL}{4f}$$

Belastung 2: die Last $p = \frac{45}{48}\frac{P}{L}$.

Diese Last gibt kein Moment[13]), da die Bogenachse eine Parabel ist. Sie gibt aber folgende Widerlagerkräfte:

$$V_2 = \frac{pL}{2} = \frac{45}{96}P, \qquad H_2 = \frac{pL^2}{8f} = \frac{15}{32}\frac{PL}{4f}$$

Somit wird
$$H = H_1 + H_2 = \frac{15}{16}\frac{PL}{4f} = H^*$$

und
$$V = V_1 + V_2 = \frac{P}{4} + \frac{45}{96}P = \frac{69}{96}P$$

und
$$V + \bar{V} = \frac{69}{96}P - \frac{7}{32}P = \frac{P}{2}$$

---

[13]) μ ist vernachlässigt.

In den anderen Fällen erhält der Bogen von den Stützen im allgemeinen, außer den zum Teil direkt übertragenen konzentrierten Lasten, eine verteilte Belastung, die jedoch nicht gleichmäßig sein muß.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie man die Näherungsmethode im Fall, daß der Bogen und der Balken verschiedene Einspannungsgrade besitzen, anwenden könnte; z. B. ein eingespannter Bogen mit einem an den Enden frei aufgelagerten Balken. Die Anwendung der Näherungsmethode ohne Berücksichtigung der Einspannungsverhältnisse gibt falsche Resultate.

4. Neue vierte Methode

Die erste Methode ist übersichtlich und für die gewöhnlichen Bogenarten sehr zweckmäßig, nur läßt sich ihr Gleichungssystem bei Bogen mit vielen Stützen nicht leicht auflösen. Die zweite Methode hat ein einfaches 3-Unbekannten-Gleichungssystem, braucht jedoch für die Anwendung auf parabolischem Bogen mit stetig variablem Trägheitsmoment ziemlich viel zusätzliche Arbeit. Die dritte Methode ist nur eine Näherungsmethode und darf lediglich in besonderen Fällen, die später behandelt werden, zur Anwendung kommen. Deshalb ist es zweckmäßig, eine Methode zu finden, die die Vorteile der ersten und zweiten Methode aufweist.

Wir nehmen an, daß ein Tragwerk (vergl. Abb. 15 a) aus folgenden Gliedern bestehe:

a) aus einem elastisch eingespannten Bogen, dessen Achse nach einer Parabel vierten Grades verläuft und dessen Trägheitsmoment J nach einem Potenzgesetz variiert.
b) aus einem Balken mit einem konstanten Trägheitsmoment $\bar{J}$, der an seinen Enden elastisch eingespannt ist.
c) aus einer Anzahl Stützen, die in der Tragebene genügend schlank sind, um als Pendelstützen betrachtet werden zu können.

Wir schalten im Balken über jeder Stütze ein Gelenk ein, um unser Grundsystem zu bilden, und führen die Balkenmomente $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ usw. als überzählige Größen ein (vergl. Abb. 15 b).

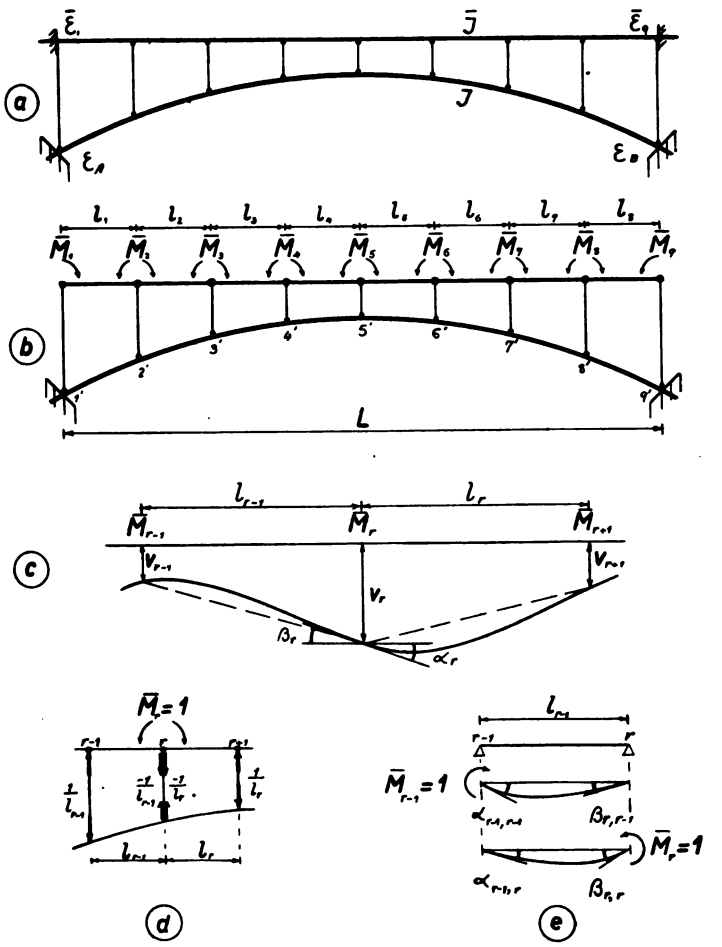


Abb. 15

Der stetige Verlauf der Biegungslinie des Balkens bildet sere Elastizitätsbedingung. Wir erhalten aus Abb. 15 c

$$\beta_r + \alpha_r = 0$$

An den Balkenenden gilt

$$\alpha_1 = -\bar{\varepsilon}_1 \bar{M}_1 \qquad \text{und} \qquad \beta_9 = -\bar{\varepsilon}_9 \bar{M}_9$$

e Winkel β_r und α_r lassen sich nach dem Superpositionsgesetz e folgt formulieren:

$$\beta_r = \bar{M}_{r-1}\beta_{r,r-1} + \bar{M}_r\beta_{r,r} + \frac{v_{r-1} - v_r}{l_{r-1}}$$

$$\alpha_r = \bar{M}_r \cdot \alpha_{r,r} + \bar{M}_{r+1}\alpha_{r,r+1} + \frac{v_{r+1} - v_r}{l_r}$$

worin $\beta_{r,r-1}$ = dem Winkel β des einfachen Balkens ($r-1$ bis r) in Punkt r infolge Moment $\bar{M}_{r-1} = 1$ bei Punkt $r-1$ usw. (vergl. Abb. 15 e).

Somit lauten unsere Elastizitätsgleichungen:

$$\bar{M}_{r-1} \cdot \beta_{r,r-1} + \bar{M}_r(\beta_{r,r} + \alpha_{r,r}) + \bar{M}_{r+1} \cdot \alpha_{r,r+1} + \frac{v_{r-1} - v_r}{l_{r-1}} + \frac{v_{r+1} - v_r}{l_r} = 0 \qquad (124)$$

An den Balkenenden gilt:

$$\bar{M}_1\alpha_{11} + \bar{M}_2\alpha_{12} + \frac{v_2 - v_1}{l_1} = -\bar{\varepsilon}_1\bar{M}_1$$

$$\bar{M}_8\beta_{98} + \bar{M}_9\beta_{99} + \frac{v_8 - v_9}{l_8} = -\bar{\varepsilon}_9\bar{M}_9$$

Somit enthält jede Gleichung augenscheinlich nur drei Momente als Unbekannte.

Sind die Öffnungen $l_1, l_2, \ldots$ gleich groß, so lassen sich die Elastizitätsgleichungen einfacher schreiben:

$$\begin{aligned}
&\bar{M}_1(\bar{\varepsilon}_1 + \alpha_{11}) + \bar{M}_2\alpha_{12} + \frac{1}{l}(-v_1 + v_2) = 0\\
&\bar{M}_1\beta_{21} + \bar{M}_2(\beta_{22} + \alpha_{22}) + \bar{M}_3\alpha_{23} + \frac{1}{l}(v_1 - 2v_2 + v_3) = 0\\
&\bar{M}_2\beta_{32} + \bar{M}_3(\beta_{33} + \alpha_{33}) + \bar{M}_4\alpha_{34} + \frac{1}{l}(v_2 - 2v_3 + v_4) = 0\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\bar{M}_8\beta_{98} + \bar{M}_9(\beta_{99} + \bar{\varepsilon}_9) + \frac{1}{l}(v_8 - v_9) = 0
\end{aligned} \qquad (124')$$

Ist $\bar{\varepsilon}_1$ sowie $\bar{\varepsilon}_9 = \infty$, so wird $\bar{M}_1 = \bar{M}_9 = 0$, und die erste und letzte Gleichung fallen weg.

Ein Moment $\bar{M}_r = +1$ im Stützpunkt r des Balkens verursacht die Stützenkräfte in Abbildung 15 d. Diese Kräfte wirken auf den Bogen und bewirken in den Punkten 2', 3', 4' usw. die

insenkungen $(\nu_2'_r)$, $(\nu_3'_r)$, $(\nu_4'_r)$ usw. Aus den Biegungslinien es unversteiften Bogens (Grundsystem) unter der Einzellast = 1 im Punkt 2 bzw. 3 usw. bis zur Mitte, kann man leicht die insenkungen $(\nu_2'_r)$, $(\nu_3'_r)$ usw. ermitteln. Somit können wir die alkensenkungen ν_1, ν_2 usw. der Gleichungen (124) und (124') ich dem Superpositionsgesetz wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 0 \\
\nu_2 &= \nu_{20}' + \bar{M}_1(\nu_{21}') + \bar{M}_2(\nu_{22}') + \bar{M}_3(\nu_{23}') + \dots \\
\nu_3 &= \nu_{30}' + \bar{M}_1(\nu_{31}') + \bar{M}_2(\nu_{32}') + \bar{M}_3(\nu_{33}') + \dots \qquad (125) \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

rin ν_{20}', ν_{30}' usw. die Einsenkungen der Punkte 2', 3' im Grundsystem infolge Verkehrslast sind.

(ν_{21}') die Einsenkung des Punktes 2' im Grundsystem allein infolge $\bar{M}_1 = +1$ im Punkt 1 des Balkens.

usw.

Diese Werte sind in das Gleichungssystem (124) oder (124') zusetzen. Um in jeder Gleichung dieses Systems nur 3 $\bar{M}$-Unkannte zu haben, benützen wir mit Vorteil das Iterationsverren, indem wir, im ersten Rechnungsgang, in jeder Gleichung s Systems (124) für die Werte von ν nur diejenigen drei $\bar{M}$ setzen, die die Gleichung (124) schon enthält. Die übrigen von Gleichung (125) setzen wir vorläufig gleich Null.

Im zweiten Rechnungsgang setzen wir die Werte von ν wie her, mit der Ausnahme, daß wir für die übrigen $\bar{M}$ von Gleiung (125) statt Null ihre Werte aus dem ersten Rechnungsgang setzen.

Die berechneten Werte von $\bar{M}$ aus den verschiedenen Rechngsgängen konvergieren schnell. Man hat die Berechnung ein- zweimal zu wiederholen. Die Wiederholung geht rasch vor h. Das Beispiel 5 auf Seite 107 illustriert uns diese Methode r anschaulich.

Will man die Elastizität der Stützen berücksichtigen, so hat n den Gleichungen (125) ein neues Glied beizufügen:

$$v_r = v'_{r0} + \bar{M}_1 (v'_{r1}) + \bar{M}_2 (v'_{r2}) + \bar{M}_3 (v'_{r3}) + \ldots + \frac{h_r}{EF_r}\left[S_{r0} + \frac{1}{l}(\bar{M}_{r-1} - 2\bar{M}_r + \bar{M}_{r+1})\right] \quad (125')$$

worin S_{r0} die Kraft, die in Stütze r im Grundsystem infolge Verkehrsbelastung entsteht.

h_r, F_r die Höhe, bezw. die Querschnittsfläche der Stütze r.

5. Einfluß der Elastizität der Stützen

Die Berechnung nach der Näherungsmethode ist im Gegensatz zu allen anderen Methoden sehr einfach. Es liegt deshalb immer die Tendenz vor, mit dieser Methode zu rechnen. Es ist daher unsere Aufgabe, festzustellen, wann man die Näherungsmethode anwenden darf und wie groß der dabei begangene Fehler ist.

Wir wollen jetzt damit anfangen, anhand von Zahlenbeispielen den Einfluß der Elastizität der Stützen (Säulen oder Hängestangen) zu untersuchen, und zwar für die Anwendbarkeit der Näherungsmethode, sowie für die Vereinfachung der genauen Methoden.

Beispiel 1.

Eingespannter Bogen mit $c = 0$, $n = 0$. Die Fahrbahn hat über dem Bogen 4 gleiche Felder[14]) (Abb. 16a). Alle Stützen haben denselben Querschnitt. $\bar{J}$ ist konstant. $= \nu J_s$ des Bogens.

Wir rechnen in diesem Beispiel nach der ersten Methode und bestimmen zuerst die Festpunktabstände. Aus Gleichung (114) erhält man

$$a_1 = 0 \qquad = b_4, \qquad a_3 = 0{,}2105\, l = b_2$$
$$a_2 = 0{,}2000\, l = b_3, \qquad a_4 = 0{,}2112\, l = b_1$$

Zunächst berechnen wir die Werte C_{11}, C_{12} usw. Wir nehmen an, *Stütze 3 habe sich um* $v_3 = 1$ *gesenkt.* Die entstehenden Momente von Abb. 16b können nach der Gleichung (115') berechnet werden.

---

[14]) In der Praxis sind vier Felder selten, sie sind jedoch für unseren Zweck genügend. Der Vorteil liegt im reduzierten Arbeitsaufwand.

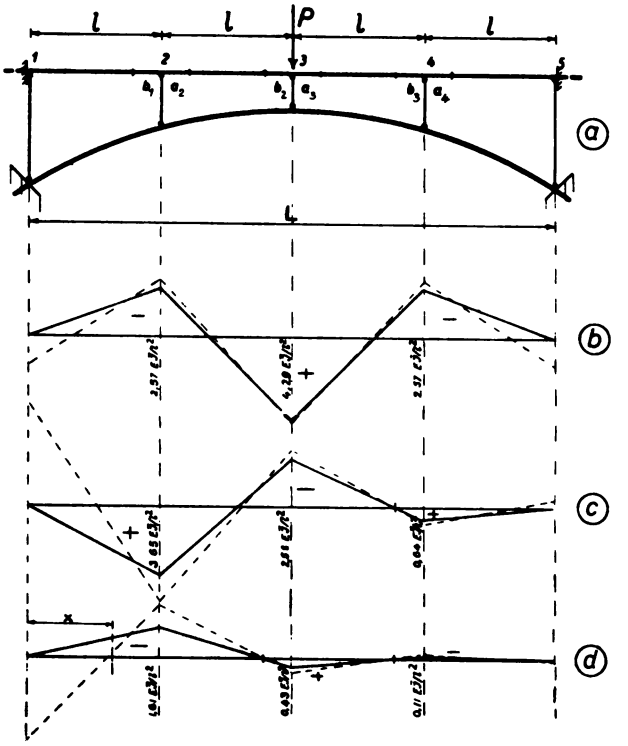


Abb. 16

(Das punktierte gilt für den voll eingespannten Balken)

$$= \nu \frac{\frac{1}{l-a} + \frac{1}{l'-b'}}{\varepsilon_a + \varepsilon_{b'}} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{0{,}8\,l} + \frac{1}{0{,}8\,l}}{2\left(\frac{2\,l}{6\,E\bar{J}} - \frac{0{,}2\,l}{0{,}8\,l} \cdot \frac{l}{6\,E\bar{J}}\right)} = \frac{30}{7} \cdot \frac{E\bar{J}}{l^2}$$

$$= -\frac{a}{l-a}\left(M_3 + \frac{\nu}{\alpha_2\, l}\right) = -\frac{0{,}2\,l}{0{,}8\,l}\left(\frac{30}{7} \cdot \frac{E\bar{J}}{l^2} + \frac{1}{\frac{l^2}{6\,E\bar{J}}}\right) = -\frac{18}{7} \cdot \frac{E\bar{J}}{l^2}$$

$$= \bar{M}_2 = -\frac{18}{7} \cdot \frac{E\bar{J}}{l^2}$$

Wir erhalten daraus die gewünschten Auflagerdrücke wie
t:

$$C_{13} = -\ 2{,}57\,\frac{E\bar{J}}{l^3} = C_{53}$$

$$C_{23} = +\ 9{,}43\,\frac{E\bar{J}}{l^3} = C_{43}$$

$$C_{33} = -\ 13{,}72\,\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

Zur Kontrolle: $\Sigma C = [-2{,}57 + 9{,}43 - 13{,}12 + 9{,}43 - 2{,}57]\,\frac{E\bar{J}}{l^3} = 0.$

Stütze 2 um $v_2 = 1$ gesenkt (Abb. 16 c).

Analog:

$$\bar{M}_2 = \quad 3{,}65\,\frac{E\bar{J}}{l^2}$$

$$\bar{M}_3 = -\ 2{,}58\,\frac{E\bar{J}}{l^2}$$

$$\bar{M}_4 = \quad 0{,}64\,\frac{E\bar{J}}{l^2}$$

Daraus folgt wie früher:

$$C_{12} = \quad 3{,}65\,\frac{E\bar{J}}{l^3}, \qquad C_{42} = -\ 3{,}85\,\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$C_{22} = -\ 9{,}87\,\frac{E\bar{J}}{l^3}, \qquad C_{52} = \quad 0{,}64\,\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$C_{32} = \quad 9{,}43\,\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

Kontrolle: $\Sigma C = [3{,}65 - 9{,}87 + 9{,}43 - 3{,}85 + 0{,}64]\,\frac{EJ}{l^3} = 0.$

Stütze 1 um $v_1 = 1$ gesenkt (Abb. 16 d).

Aus der Biegungslinie erkennen wir:

$$v_1 = 1 = -\int \bar{M}\,x\,\frac{dx}{E\bar{J}} - \bar{M}_2\,\bar{\varepsilon}_2 \cdot l \qquad \text{wobei } \bar{M} = \bar{M}_2\,\frac{x}{l}$$

$$= -\frac{M_2}{l E\bar{J}}\int x^2\,dx - \bar{M}_2\,l\left(\alpha_{22} - \frac{b_2}{l - b_2}\,\alpha_{23}\right)$$

$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}$ bei Punkt 2 im Balken 2—3

ıraus ergibt sich

$$\bar{M}_2 = -1{,}61\frac{E\bar{J}}{l^2}, \quad \bar{M}_3 = +0{,}43\frac{E\bar{J}}{l^2}, \quad \bar{M}_4 = -0{,}11\frac{E\bar{J}}{l^2}$$

ıd somit folgt:

$$C_{11} = -1{,}61\frac{E\bar{J}}{l^3} \qquad C_{41} = +0{,}64\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$C_{21} = +3{,}65\frac{E\bar{J}}{l^3} \qquad C_{51} = -0{,}11\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$C_{31} = -2{,}57\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

ıntrolle: $\Sigma C = (-1{,}61 + 3{,}65 - 2{,}57 + 0{,}64 - 0{,}11)\frac{E\bar{J}}{l^3} = 0$

s zweite Kontrolle haben wir

$$C_{12} = C_{21} = +3{,}65\frac{E\bar{J}}{l^3} \qquad C_{23} = C_{32} = +9{,}43\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$C_{13} = C_{31} = -2{,}57\frac{E\bar{J}}{l^3} \qquad C_{52} = C_{41} = +0{,}64\frac{E\bar{J}}{l^3}$$

Wir benötigen noch die Bogensenkungen v_{11}', v_{12}' usw. unter = 1. Diese bekommen wir ohne weiteres aus der Tafel VII. ist:

$$v_{22}' = 0{,}871\,T = v_{44}' \qquad v_{42}' = -0{,}531\,T$$

$$v_{32}' = -0{,}278\,T = v_{43}' \qquad v_{33}' = 0{,}600\,T$$

$$\text{worin} \quad T = \frac{L^3}{3072\,EJ_s}$$

Die Gleichungen (112) lassen sich somit wie folgt schreiben:

$$= \qquad = \qquad 0 \qquad = v_5'$$

$$= T(\ 0{,}871\,C_2 - 0{,}278\,C_3 - 0{,}531\,C_4) = T(\ 0{,}340\,C_2 - 0{,}278\,C_3)^{15}) = v_4'$$

$$= T(-0{,}278\,C_2 + 0{,}600\,C_3 - 0{,}278\,C_4) = T(-0{,}556\,C_2 - 0{,}600\,C_3)$$

---

15) Wegen der Symmetrie des Systems und der Belastung wird $= C_4$ und $C_1 = C_5$.

Aus Gleichung (111) wird:

$$C_1 = 0 + \nu_1 (C_{11} + C_{15}) + \nu_2 (C_{12} + C_{14}) + \nu_3 C_{13}$$

$$= \zeta h_1 C_1 \frac{E\bar{J}}{l^3} (-1{,}61 - 0{,}11) + \left[\zeta h_2 C_2 + T(0{,}340\, C_2 - 0{,}278\, C_3)\right] (3{,}65 + 0{,}64) \frac{E\bar{J}}{l^3}$$

$$+ \left[\zeta h_3 C_3 + T(-0{,}556\, C_2 + 0{,}600\, C_3)\right] (-2{,}57) \frac{E\bar{J}}{l^3}$$

Setzen wir $\nu = \frac{\bar{J}}{J_s}$ und $\psi_r = \zeta h_r \frac{E\bar{J}}{l^3}$

so erhalten wir für C_1

$$C_1 (1 + 1{,}715\, \psi_1) - C_2 (\ 0{,}0603\, \nu + \ 4{,}288\, \psi_2) + C_3 (\ 0{,}0571\, \nu + \ 2{,}571\, \psi_3) = 0$$

Nach demselben Verfahren bekommen wir für C_2 und C_3

$$C_1 (\ 4{,}289\, \psi_1) - C_2 (1 + 0{,}2068\, \nu + 13{,}742\, \psi_2) + C_3 (\ 0{,}1978\, \nu + \ 9{,}448\, \psi_3) = 0$$

$$C_1 (\ 5{,}142\, \psi_1) - C_2 (\ 0{,}2929\, \nu + 18{,}896\, \psi_2) + C_3 (1 + 0{,}2808\, \nu + 13{,}714\, \psi_3) = P$$

Wir nehmen jetzt an, die Stützen seien starr; dadurch wird $\zeta = 0$, d. h. $\psi_r = 0$, und wir bekommen

$$\begin{aligned} C_1 -- \quad & 0{,}0603\, \nu \quad C_2 + \quad 0{,}0571\, \nu \quad C_3 = 0 \\ -(1 + & 0{,}2068\, \nu) \quad C_2 + \quad 0{,}1978\, \nu \quad C_3 = 0 \\ -- \quad & 0{,}2929\, \nu \quad C_2 + (1 + 0{,}2808\, \nu) \quad C_3 = P \end{aligned}$$

Daraus folgt:

für: $\nu = 0{,}5$	wird:	$C_1 = -0{,}023_5\, P$,	$C_2 = 0{,}080\ P$,	$C_3 = 0{,}88$
$\nu = 1{,}0$		$C_1 = -0{,}038\ P$,	$C_2 = 0{,}132_5\, P$,	$C_3 = 0{,}81$
$\nu = 4{,}0$		$C_1 = -0{,}077\ P$,	$C_2 = 0{,}268\ P$,	$C_3 = 0{,}61$
$\nu = 10{,}0$		$C_1 = -0{,}094\ P$,	$C_2 = 0{,}334\ P$,	$C_3 = 0{,}52$

Wir benützen diese Stützenkräfte, um die Biegungsmomente im Bogen sowie im Balken zu bestimmen. Das Resultat zeigt uns die Tabelle auf Seite 105.

Beispiel 2:

ist genau wie Beispiel 1, nur sind die Stützen nicht starr. Der Einfachheit halber behandeln wir ein numerisches Beispiel.

$L = 40{,}0$ m, $l = 10{,}0$ m, $f = 13{,}2$ m, $h_1 = 15{,}0$ m
$h_2 = 5{,}1$ m, $h_3 = 1{,}8$ m, $\bar{J} = 0{,}156$ m^4, $\bar{J}_s = 0{,}039$ m^4
$\nu = 4{,}0$, $F_c =$ Säulenquerschnittsfläche $= 0{,}40$ m^2

Der Dehnbarkeitsfaktor ist

$$\psi_r = \zeta h_r \frac{E\bar{J}}{l^3} = \frac{1}{F_c \cdot E_c} h_r \frac{E\bar{J}}{l^3} = \nu h_r \frac{E}{E_c} \frac{J_s}{F_c \cdot l^3} \qquad (127)$$

Da hier die Stützen im allgemeinen auf Druck beansprucht sind, so wird E_c der Stützen $= E$ des Balkens, und somit erhalten wir

$$\psi_1 = 0{,}001462\,\nu$$
$$\psi_2 = 0{,}000497\,\nu$$
$$\psi_3 = 0{,}000175\,\nu$$

In unserem Beispiel ist $\nu = 4{,}0$; wir werden aber das Problem noch für andere Werte von ν berechnen, und zwar, indem wir die Dimensionen des Bogens und der Stützen beibehalten und über das J des Balkens so verfügen, daß es den anderen ν entspricht. Wir setzen obige Werte ψ_1, ψ_2 und ψ_3 in den Gleichungen (126) ein und erhalten:

$$\cdot \left(\frac{1}{\nu} + 0{,}00250\right) - C_2\,\nu \cdot \quad 0{,}06239 \quad + C_3\,\nu \cdot \quad 0{,}05750 \quad = 0$$

$$\cdot \quad 0{,}00627 \quad - C_2\,\nu \cdot \left(\frac{1}{\nu} + 0{,}21364\right) + C_3\,\nu \cdot \quad 0{,}19945 \quad = 0$$

$$\cdot \quad 0{,}00750 \quad - C_2\,\nu \cdot \quad 0{,}30231 \quad + C_3\,\nu \cdot \left(\frac{1}{\nu} + 0{,}2832\right) = P$$

Daraus folgt:

für $\nu =$ 0,5:	$C_1 = -0{,}023_5\,P$,	$C_2 = 0{,}080\,P$,	$C_3 = 0{,}886\,P$
$= 1$	$= -0{,}038_5\,P$,	$= 0{,}133\,P$,	$= 0{,}811\,P$
$= 4$	$= -0{,}076\,P$,	$= 0{,}266\,P$,	$= 0{,}620\,P$
$= 10$	$= -0{,}093\,P$,	$= 0{,}331\,P$,	$= 0{,}524\,P$

Beispiel 3:

Ein eingespannter Bogen mit untenliegender Fahrbahn (Abb. 17); Pfeilhöhe f beträgt $\frac{L}{5}$ (in der Praxis kaum überboten). Die Hängestangen werden als elastisch betrachtet. Jede Hängestange ist mit 150 cm² Eisen armiert. Alle anderen Angaben wie im Beispiel 2.

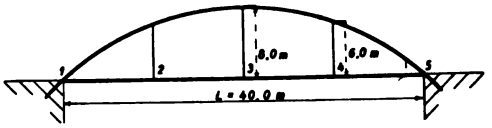


Abb. 17

Aus Gleichung (127) erhalten wir:

$$\psi_1 = 0$$
$$\psi_2 = 0{,}00157\,\nu$$
$$\psi_3 = 0{,}00210\,\nu$$

in die Gleichung (126) eingesetzt, folgt:

$$C_1 - 0{,}0670\ \nu C_2 + 0{,}0624\ \nu C_3 = 0$$
$$-\left(\frac{1}{\nu} + 0{,}2284\right)\nu C_2 + 0{,}2176\ \nu C_3 = 0$$
$$-\ 0{,}3225\ \nu C_2 + \left(\frac{1}{\nu} + 0{,}3096\right)\nu C_3 = P$$

Analog Beispiel 2 erhalten wir die Auflagerdrücke:

für $\nu = 0{,}5$:	$C_1 = -0{,}025\ P$	$C_2 = 0{,}085_5\,P$	$C_3 = 0{,}879\,P$
$= 1$	$= -0{,}040\ P$	$= 0{,}141\ P$	$= 0{,}798\,P$
$= 4$	$= -0{,}077_5\,P$	$= 0{,}275\ P$	$= 0{,}605\,P$
$= 10$	$= -0{,}092\ P$	$= 0{,}337\ P$	$= 0{,}510\,P$

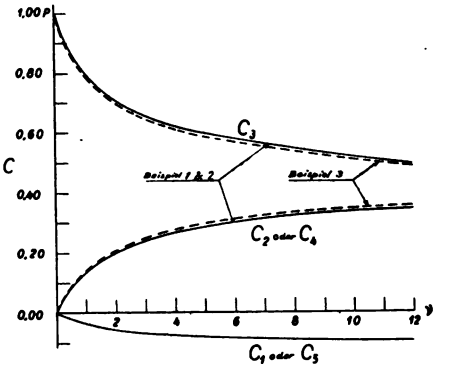


Abb. 18

Das Diagramm in (Abb. 18) stellt uns die Abhängigkeit der Stützenkräfte von den ν dar. Dabei interessiert uns in erster Linie

C_3, die Stützenkraft unmittelbar unter der Last. Bei kleinen Werten von ν nimmt die Kurve anfangs rasch ab. Bei großen Werten verläuft die Kurve viel flacher. Im allgemeinen hat das Trägheitsmoment der gesamten Fahrbahntafel gegenüber demjenigen des Bogens eine bedeutende Größe, und somit spielt die Fahrbahntafel die Rolle des Lastverteilers. Schon bei $\nu = 0{,}5$ wird 12,5%, und bei $\nu = 1$ wird 20% der Last vom Fahrbahnträger direkt getragen und auf die anderen Stützen verteilt. Dieser verteilte Lastanteil wächst mit ν, d. h. je steifer der Balken ist. Mit zunehmender Balkensteifigkeit werden die ν_1, ν_2, ν_3 usw. (Abb. 9) asymptotisch gleich groß.

Die Balkenmomente bilden das Hauptziel unserer Untersuchung, deshalb werden wir im folgenden die Beispiele 1, 2 und 3 auf Grund der Balkenmomente vergleichen, um den Einfluß der Elastizität der Stützen zu bestimmen.

Brücke mit obenliegender Fahrbahn	$\bar{M}_2$			$\bar{M}_3$		
	mit ψ Beispiel 2	ohne ψ Beispiel 1	Fehler	mit ψ Beispiel 2	ohne ψ Beispiel 1	Fehler
$\nu = 0{,}5$	$-0{,}023_5\ Pl$	$-0{,}023_5\ Pl$	*%	$0{,}033\ Pl$	$0{,}032_5\ Pl$	*%
$\nu = 1$	$-0{,}038_5$	$-0{,}038$	*	$0{,}056$	$0{,}056_5$	*
$\nu = 4$	$-0{,}076$	$-0{,}077$	*	$0{,}114$	$0{,}114$	*
$\nu = 10$	$-0{,}093$	$-0{,}094$	*	$0{,}145$	$0{,}146$	*
Brücke mit untenliegender Fahrbahn	$\bar{M}_2$			$\bar{M}_3$		
	mit ψ Beispiel 3	ohne ψ Beispiel 1	Fehler	mit ψ Beispiel 3	ohne ψ Beispiel 1	Fehler
$\nu = 0{,}5$	$-0{,}025\ Pl$	$-0{,}023_5\ Pl$	−6%	$0{,}035_5\ Pl$	$0{,}032_5\ Pl$	−8%
$\nu = 1$	$-0{,}040$	$-0{,}038$	−5	$0{,}061$	$0{,}056_5$	−7
$\nu = 4$	$-0{,}077_5$	$-0{,}077$	*	$0{,}120$	$0{,}114$	−5
$\nu = 10$	$-0{,}092$	$-0{,}094$	2	$0{,}153$	$0{,}146$	−5
* absolut kleiner als 2						

Aus dieser Tabelle ersehen wir, daß die Vernachlässigung der Elastizität der Stützen bei gewölbten Brücken mit obenliegender Fahrbahn zulässig ist, da der Momentenunterschied stets kleiner als 2 % ist.

Bei den Brücken mit untenliegender Fahrbahn ist der Unterschied nicht so klein, er beträgt bis ca. 8 % und mehr. Das kommt daher, weil erstens im allgemeinen die Hängestangen länger sind und somit ihre eigene Dehnung größer ist als bei der anderen Brückenart; und zweitens, weil man bei den Hängestangen nur das Eisen als das tragende Element betrachten darf. Seine Querschnittsfläche ist trotz der n-maligen Vergrößerung beträchtlich kleiner als diejenige der Druckstützen. Bei größerem ν ist der Fehler nicht sehr groß, etwa 5 %, und das ermutigt uns, in solchen Fällen starre Hängestangen anzunehmen, da hier der Balken kräftig ist, und daher kann er die 5 % der zusätzlichen Momente — neben diesen und den eigenen Hauptmomenten — ohne große Spannungsänderung aushalten.

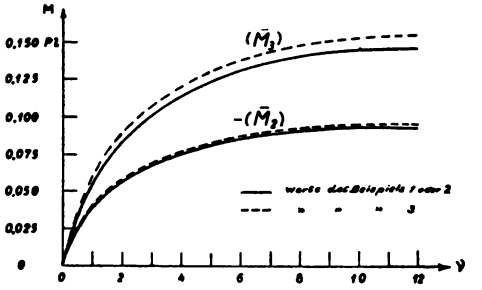


Abb. 19

Wir zeigen in (Abb. 19) die Kurven von $\bar{M}_2$ und $\bar{M}_3$ in Funktion von ν. Man sieht, wie rasch die Momente bei kleinem ν zunehmen, und wie langsam sie bei großem ν wachsen.

6. Einfluß der Anzahl der Stützen

Eine zweite Annahme der Näherungsmethode ist die, daß die Stützenzahl unendlich groß sei. Wir wollen jetzt deshalb die Näherungsmethode mit den anderen genauen Methoden vergleichen, und zwar anhand von Zahlen-Beispielen, wo die Anzahl der Stützen variiert. Unser Ziel ist, die kleinste Anzahl Stützen zu bestimmen, bei der die Näherungsmethode anwendbar ist. Wir

legen einen eingespannten Bogen mit $c = 0$ und $n = 0{,}4$ zu Grunde, der mit einem eingespannten Balken mit konstantem Trägheitsmoment versteift ist.

Beispiel 4: 4 gleiche Öffnungen.

Berechnung nach der ersten Methode:

Der Vorgang ist derselbe wie in Beispiel 1. Wir begnügen uns mit den Resultaten.

$\nu = 1$

$C_1 = -0{,}0894\,P = C_5 \qquad \bar{M}_1 = +0{,}00932\,PL = \bar{M}_5$

$C_2 = +0{,}2084\,P = C_4 \qquad \bar{M}_2 = -0{,}01325\,PL = \bar{M}_4$

$C_3 = +0{,}7620\,P \qquad \bar{M}_3 = +0{,}01672\,PL$

$\Sigma C = \quad 1{,}0000\,P$

$\nu = 10$

$C_1 = -0{,}1512\,P = C_5 \qquad \bar{M}_1 = +0{,}0133\,PL = \bar{M}_5$

$C_2 = +0{,}3920\,P = C_4 \qquad \bar{M}_2 = -0{,}0245\,PL = \bar{M}_4$

$C_3 = +0{,}5184\,P \qquad \bar{M}_3 = +0{,}0357\,PL$

$\Sigma C = \quad 1{,}0000\,P$

Beispiel 5: 8 gleiche Öffnungen (Abb. 20).

a) Berechnung nach der neuen Methode.

Die folgende Tabelle gibt uns die für unseren Bogen nach den Gleichungen (34), (35) und (36) berechneten Koeffizienten ν_{22}', ν_{23}' usw.

	Infolge $P = 1$ im Punkt			
	2′	3′	4′	5′
$\nu_2' =$	0,451 T	0,566 T	0,178 T	−0,254 T
$\nu_3' =$	0,566	1,471	0,892	−0,361
$\nu_4' =$	0,187	0,892	1,307	0,220
$\nu_5' =$	−0,254	−0,361	0,220	0,821
$\nu_6' =$	−0,471	−1,126	−0,959	0,220
$\nu_7' =$	−0,377	−1,011	−1,126	−0,361
$\nu_8' =$	−0,129	−0,377	−0,471	−0,254

Obige Tabelle führt zur folgenden:

infolge P	infolge $\bar{M}_1=1$	infolge $\bar{M}_2=1$	infolge $\bar{M}_3=1$	infolge $\bar{M}_4=1$	infolge $\bar{M}_5=1$
$\nu_{20}=-0{,}254\,PT$	$\nu_{21}=0{,}451\,\frac{T}{l}$	$\nu_{22}=-0{,}336\,\frac{T}{l}$	$\nu_{23}=-0{,}503\,\frac{T}{l}$	$\nu_{24}=-0{,}044\,\frac{T}{l}$	$\nu_{25}=0{,}215\,\frac{T}{l}$
$\nu_{30}=-0{,}361$	$\nu_{31}=0{,}566$	$\nu_{32}=0{,}339$	$\nu_{33}=-1{,}484$	$\nu_{34}=-0{,}674$	$\nu_{35}=0{,}488$
$\nu_{40}=0{,}220$	$\nu_{41}=0{,}187$	$\nu_{42}=0{,}518$	$\nu_{43}=-0{,}290$	$\nu_{44}=-1{,}502$	$\nu_{45}=-0{,}092$
$\nu_{50}=0{,}821$	$\nu_{51}=-0{,}254$	$\nu_{52}=0{,}147$	$\nu_{53}=0{,}688$	$\nu_{54}=0{,}020$	$\nu_{55}=-1{,}202$
$\nu_{60}=0{,}220$	$\nu_{61}=-0{,}471$	$\nu_{62}=-0{,}184$	$\nu_{63}=0{,}822$	$\nu_{64}=1{,}012$	$\nu_{65}=-0{,}092$
$\nu_{70}=-0{,}361$	$\nu_{71}=-0{,}377$	$\nu_{72}=-0{,}257$	$\nu_{73}=0{,}519$	$\nu_{74}=0{,}880$	$\nu_{75}=0{,}488$
$\nu_{80}=-0{,}254$	$\nu_{81}=-0{,}129$	$\nu_{82}=-0{,}119$	$\nu_{83}=0{,}154$	$\nu_{84}=0{,}311$	$\nu_{85}=0{,}215$

Wir haben $$T=\frac{L^3}{3072\,EJ_s}=\frac{8^3\,l^3}{3072\,EJ_s}=\frac{l^3}{6\,EJ_s},$$

und somit erhalten wir

$$\beta_{r,r-1}=\alpha_{r,r+1}=\frac{l}{6\,E\,\bar{J}}=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{l}{6EJ_s}=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}$$

$$\beta_{r,r}+\alpha_{r,r}=\frac{4\,l}{6\,E\,\bar{J}}=\frac{4}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}$$

Erster Rechnungsgang.

Die erste Gleichung vom Gleichungssystem (124′) schreiben wir wie folgt:

$$\bar{M}_1\frac{2}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}+\bar{M}_2\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}$$

$$+\frac{1}{l}\left[-0{,}254\,\frac{T}{l}\cdot Pl+\bar{M}_1(0{,}451)\frac{T}{l}+\bar{M}_2(-0{,}336)\frac{T}{l}\right]=0$$

oder $$\bar{M}_1\left(\frac{2}{\nu}+0{,}451\right)+\bar{M}_2\left(\frac{1}{\nu}-0{,}336\right)=0{,}254\,Pl$$

Die zweite Gleichung gibt uns

$$\bar{M}_1\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}+\bar{M}_2\frac{4}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}+\bar{M}_3\frac{1}{\nu}\cdot\frac{T}{l^2}+\frac{1}{l}\Big\{0-2\Big[-0{,}254\,\frac{T}{l}\cdot Pl$$

$$+\bar{M}_1(0{,}451)\frac{T}{l}+\bar{M}_2(-0{,}336)\frac{T}{l}+\bar{M}_3(-0{,}503)\frac{T}{l}\Big]$$

$$+\Big[-0{,}361\,\frac{T}{l}\cdot Pl+\bar{M}_1(0{,}566)\frac{T}{l}+\bar{M}_2(0{,}339)\frac{T}{l}$$

$$+\bar{M}_3(-1{,}484)\frac{T}{l}\Big]\Big\}=0$$

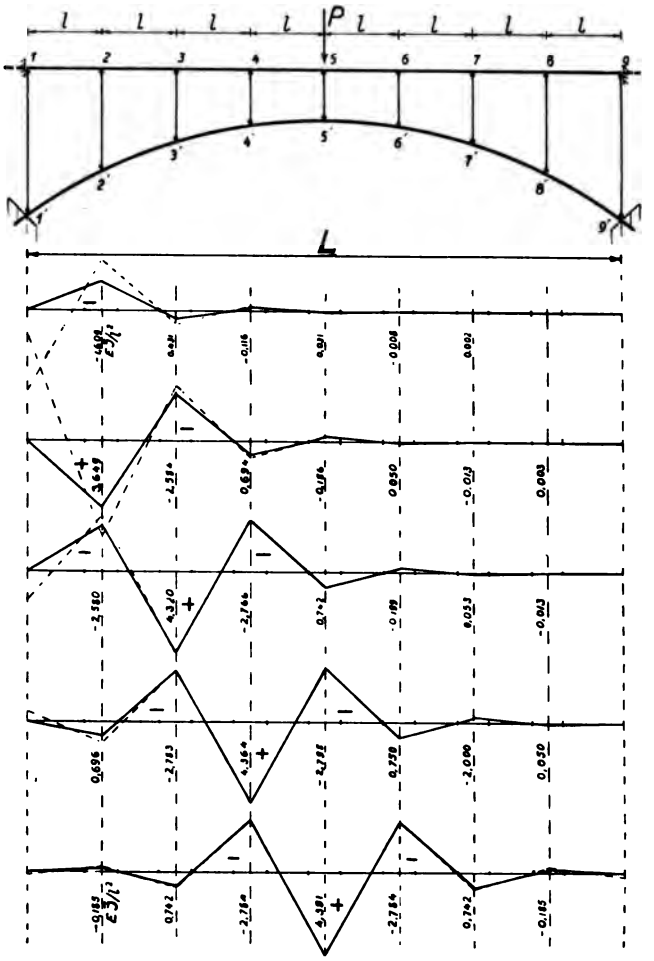


Abb. 20

(Das Punktierte ist für den eingespannten Balken.)

oder

$$\bar{M}_1\left(\frac{1}{\nu}-0{,}336\right)+\bar{M}_2\left(\frac{4}{\nu}+1{,}011\right)+\bar{M}_3\left(\frac{1}{\nu}-0{,}478\right)=-0{,}147\,Pl$$

Ähnlich ergibt sich

$$\bar{M}_2\left(\frac{1}{\nu}-0{,}478\right)+\bar{M}_3\left(\frac{4}{\nu}+2{,}175\right)+\bar{M}_4\left(\frac{1}{\nu}-0{,}216\right)=-0{,}688\,Pl$$

$$\bar{M}_3\left(\frac{1}{\nu}-0{,}216\right)+\bar{M}_4\left(\frac{4}{\nu}+2{,}350\right)+\bar{M}_5\left(\frac{1}{\nu}-0{,}530\right)=-0{,}020\,Pl$$

$$\bar{M}_4\left(\frac{1}{\nu}-0{,}530\right)+\bar{M}_5\left(\frac{4}{\nu}+2{,}220\right)+\bar{M}_4\left(\frac{1}{\nu}-0{,}530\right)=+1{,}202\,Pl$$

Für $\nu = 1{,}0$ hat man:

$$\begin{aligned}
2{,}451\,\bar{M}_1 + 0{,}664\,\bar{M}_2 &= 0{,}254\,Pl\\
0{,}664\,\bar{M}_1 + 5{,}011\,\bar{M}_2 + 0{,}522\,\bar{M}_3 &= -0{,}147\,Pl\\
0{,}522\,\bar{M}_2 + 6{,}175\,\bar{M}_3 + 0{,}784\,\bar{M}_4 &= -0{,}688\,Pl\\
0{,}784\,\bar{M}_3 + 6{,}350\,\bar{M}_4 + 0{,}470\,\bar{M}_5 &= -0{,}020\,Pl\\
0{,}470\,\bar{M}_4 + 6{,}220\,\bar{M}_5 + 0{,}470\,\bar{M}_4 &= 1{,}202\,Pl
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$\bar{M}_1 = +0{,}113\,Pl = \bar{M}_9\,, \qquad \bar{M}_2 = -0{,}033\,Pl = \bar{M}_8$$
$$\bar{M}_3 = -0{,}108\,Pl = \bar{M}_7\,, \qquad \bar{M}_4 = -0{,}004\,Pl = \bar{M}_6$$
$$\bar{M}_5 = +0{,}194\,Pl$$

Zweiter Rechnungsgang.

Die erste Gleichung (124') wird mit Benützung der Ergebnisse des ersten Rechnungsgangs wie folgt geschrieben:

$$\begin{aligned}
2\,\bar{M}_1\frac{T}{l^2}+\bar{M}_2\frac{T}{l^2}+\frac{T}{l^2}\Big\{-0+[&-0{,}254\,Pl+\bar{M}_1(0{,}451)+\bar{M}_2(-0{,}336)\\
&+(-0{,}108\,Pl)(-0{,}503)+(-0{,}004\,Pl)(-0{,}044)+(0{,}194\,Pl)(0{,}215)\\
&+(-0{,}004\,Pl)(0{,}311)+(-0{,}108\,Pl)(0{,}154)+(-0{,}033\,Pl)(-0{,}119)\\
&+(0{,}113\,Pl)(-0{,}129)]\Big\}=0
\end{aligned}$$

oder

$$2{,}451\,\bar{M}_1 + 0{,}664\,\bar{M}_2 = 0{,}186\,Pl$$

nalog folgt:

$$
\begin{aligned}
0{,}664\,\bar{M}_1 + 5{,}011\,\bar{M}_2 + 0{,}522\,\bar{M}_3 &= -0{,}124\,Pl\\
0{,}522\,\bar{M}_2 + 6{,}175\,\bar{M}_3 + 0{,}784\,\bar{M}_4 &= -0{,}486\,Pl\\
0{,}784\,\bar{M}_3 + 6{,}350\,\bar{M}_4 + 0{,}470\,\bar{M}_5 &= -0{,}109\,Pl\\
0{,}470\,\bar{M}_4 + 6{,}220\,\bar{M}_5 + 0{,}470\,\bar{M}_4 &= \quad 0{,}972\,Pl
\end{aligned}
$$

ıd daraus:

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_1 &= +0{,}0836\,Pl = \bar{M}_9\,, & \bar{M}_2 &= -0{,}0282\,Pl = \bar{M}_8\\
\bar{M}_3 &= -0{,}0738\,Pl = \bar{M}_7\,, & \bar{M}_4 &= -0{,}0198\,Pl = \bar{M}_6\\
& & \bar{M}_5 &= +0{,}1590\,Pl
\end{aligned}
$$

Dritter Rechnungsgang.

Die Wiederholung der Berechnung mit Benützung der letzten omentenwerte gibt uns folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
2{,}451\,\bar{M}_1 + 0{,}664\,\bar{M}_2 &= \quad 0{,}203\,Pl\\
0{,}664\,\bar{M}_1 + 5{,}011\,\bar{M}_2 + 0{,}522\,\bar{M}_3 &= -0{,}133\,Pl\\
0{,}522\,\bar{M}_2 + 6{,}175\,\bar{M}_3 + 0{,}784\,\bar{M}_4 &= -0{,}525\,Pl\\
0{,}784\,\bar{M}_3 + 6{,}350\,\bar{M}_4 + 0{,}470\,\bar{M}_5 &= -0{,}108\,Pl\\
0{,}470\,\bar{M}_4 + 6{,}220\,\bar{M}_5 + 0{,}470\,\bar{M}_4 &= \quad 1{,}029\,Pl
\end{aligned}
$$

ıraus:

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_1 &= \quad 0{,}0911\,Pl = \bar{M}_9\,, & \bar{M}_2 &= -0{,}0303\,Pl = \bar{M}_8\\
&= \quad 0{,}0114\,PL\,, & &= -0{,}0038\,PL\\
\bar{M}_3 &= -0{,}0799\,Pl = \bar{M}_7\,, & \bar{M}_4 &= -0{,}0196\,Pl = \bar{M}_6\\
&= -0{,}0100\,PL\,, & &= -0{,}00245\,PL\\
& & \bar{M}_5 &= 0{,}1684\;\;Pl\\
& & &= 0{,}02105\,PL
\end{aligned}
$$

ese Werte dürfen als endgültig betrachtet werden, da sie die eichungen (124′) für alle Momente erfüllen.

Für $\nu = 10$ erhalten wir nach demselben Verfahren:

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_1 &= \quad 0{,}2062\,Pl = \bar{M}_9\,, & \bar{M}_2 &= -0{,}0861\,Pl = \bar{M}_8\\
&= \quad 0{,}0258\,PL\,, & &= -0{,}0108\,PL\\
\bar{M}_3 &= -0{,}1505\,Pl = \bar{M}_7\,, & \bar{M}_4 &= -0{,}0268\,Pl = M_6\\
&= -0{,}0188\,PL\,, & &= -0{,}00335\,Pl\\
& & \bar{M}_5 &= 0{,}3205\,Pl\\
& & &= 0{,}0401\,PL
\end{aligned}
$$

Bei der Behandlung dieses Beispiels könnten wir die Sym metrie für die Iteration benützen, und dadurch hätten wir wahr scheinlich den dritten Rechnungsgang ersparen können. Es ist z bemerken, daß die verschiedenen Rechnungsgänge rasch vor sic gehen, umso mehr, wenn man tabellarisch arbeitet. Auch di Lösung der Gleichungen geht rasch, da die Systemsdeterminant sich nicht ändert. Somit empfiehlt sich diese neue Methode auc für die genauen Berechnungen von Brücken mit vielen Stützen.

b) Berechnung nach der Näherungsmethode.

Die Näherungsmethode löst zugleich die Beispiele 4 und ! Zuerst rechnen wir den Ersatzbogen. Gleichung (123) gibt fo gende Werte für n^*

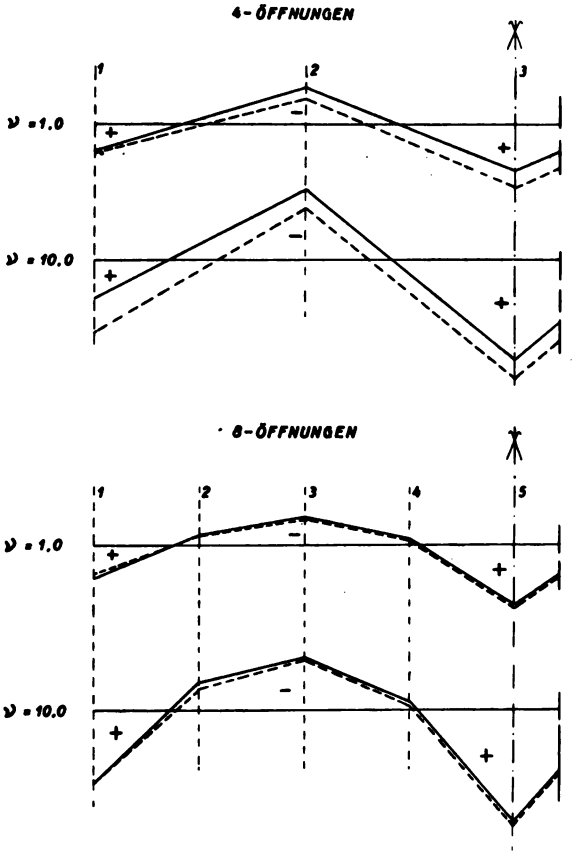
	$\eta = 1$	$^3/_4$	$^1/_2$	$^1/_4$	n^* mittel
$\nu = 1$	$n^* = 0{,}571$	0,640	0,675	0,685	**0,643**
$\nu = 10$	$n^* = 0{,}880$	0,922	0,936	0,944	**0,921**

			$\nu = 1$	$\nu = 10$
Aus Gleichung	(26):	a^*	$= 0{,}3516\,L$	$0{,}3370\,L$
„ „	(42):	r^*	$= 0{,}1335$	$0{,}1268$
„ „	(69):	λ^*	$= 14{,}04$	$11{,}73$
„ „	(27′):	$c_0'^*$	$= 0{,}297$	$0{,}326$
„ „	(43):	k^*	$= 0{,}962$	$0{,}942$
„ „	(31):	M^*	$= \frac{PL}{2}(0{,}090 - 0{,}50\,\eta + 0{,}481\,\eta^2)$	$\frac{PL}{2}(0{,}093 - 0{,}50 + 0{,}471\,\eta^2)$

Daraus erhalten wir

Für $\eta = 1$,	$M^* = 0{,}0355\,PL$	$0{,}0320\,PL$
$= \frac{3}{4}$,	$M^* = -0{,}0074$	$-0{,}0085$
$= \frac{1}{2}$,	$M^* = -0{,}0199$	$-0{,}0195$
$= \frac{1}{4}$,	$M^* = -0{,}0025$	$-0{,}0012$
$= 0$,	$M^* = 0{,}0450$	$0{,}0465$

Diese Momente verteilen sich nach Gleichung (122) wie folgt:



—— Moment nach der genauen Methode.

– – Moment nach der Näherungsmethode.

Abb. 21

Schnitt	$\eta = 1$ (Kämpfer)	$^3/_4$	$^1/_2$ (Viertel)	$^1/_4$	0 (Scheitel)
d =	0,40	0,725	0,85	0,9625	1,00
$\underline{=1}$ M =	0,0254 *PL*	–0,0043 *PL*	–0,0108 *PL*	–0,0013 *PL*	0,0225 *PL*
$\bar{M}$ =	0,0101 *PL*	–0,0031 *PL*	–0,0091 *PL*	–0,0012 *PL*	0,0225 *PL*
d =	4,0	7,25	8,5	9,625	10,0
$\underline{=10}$ M =	0,0064 *PL*	–0,0010 *PL*	–0,0020 *PL*	–0,0001 *PL*	0,0042 *PL*
$\bar{M}$ =	0,2560 *PL*	–0,0075 *PL*	–0,0175 *PL*	–0,0011 *PL*	0,0423 *PL*

Die Abbildung (21) stellt die Balkenmomente dar. Daraus erhellt, daß die Näherungsmethode bei acht Öffnungen so gute Resultate zeitigt, *daß man acht Öffnungen als die untere Grenze für die Anwendung der Näherungsmethode annehmen darf.* Dies ist praktisch sehr befriedigend, denn je größer die Zahl der Öffnungen ist, umso zeitraubender ist die Anwendung der genauen Methoden, dafür werden die Resultate der Näherungsmethode immer besser.

Ein bemerkenswerter Fehler in den Resultaten der Näherungsmethode in den Beispielen 4 und 5 ist der, daß $\int_0^{L_1} \frac{\bar{M}\,ds}{E\bar{J}}$ nicht gleich Null ist, was bei den genauen Methoden erfüllt ist. Dieser Fehler nimmt stark ab, sobald die Anzahl der Öffnungen zunimmt [16]).

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Näherungsmethode in bezug auf die Bogenmomente genügend kleine Fehler ergibt. Dafür berechnen wir zuerst die genauen Bogenmomente aus denjenigen des Balkens (vergl. Seite 111). Wir erhalten folgende Stützenkräfte:

$\nu = 1$	$\nu = 10$
$C_1 = -\,0{,}1214\,P = C_9$	$C_1 = -\,0{,}2923\,P = C_9$
$C_2 = +\,0{,}0718\,P = C_8$	$C_2 = +\,0{,}2279\,P = C_8$
$C_3 = +\,0{,}1099\,P = C_7$	$C_3 = +\,0{,}1881\,P = C_7$
$C_4 = +\,0{,}1277\,P = C_6$	$C_4 = +\,0{,}2236\,P = C_6$
$C_5 = +\,0{,}6240\,P$	$C_5 = +\,0{,}3054\,P$
$\Sigma C = +\,1{,}0000\,P$	$\Sigma C = +\,1{,}0000\,P$

Gleichung (31) liefert uns für jede Stützenlast C

$$M_{links} = \frac{CL}{2}\left[\left(\xi' - r_1 - r_2 - \frac{k}{2}\cdot c_0'\right) + (-\xi' - r_1 + r_2)\,\eta + \frac{k}{2}\,\eta^2\right]$$

$$M_{rechts} = \frac{CL}{2}\left[\left(\xi - r_1 - r_2 - \frac{k}{2}\cdot c_0'\right) + (\quad \xi - r_1 + r_2)\,\eta + \frac{k}{2}\,\eta^2\right]$$

---

[16]) Der Fehler entsteht hauptsächlich dadurch, daß man das Moment zwischen den Stützen geradlinig variieren läßt.

Die Resultate sind in folgender Tabelle enthalten.

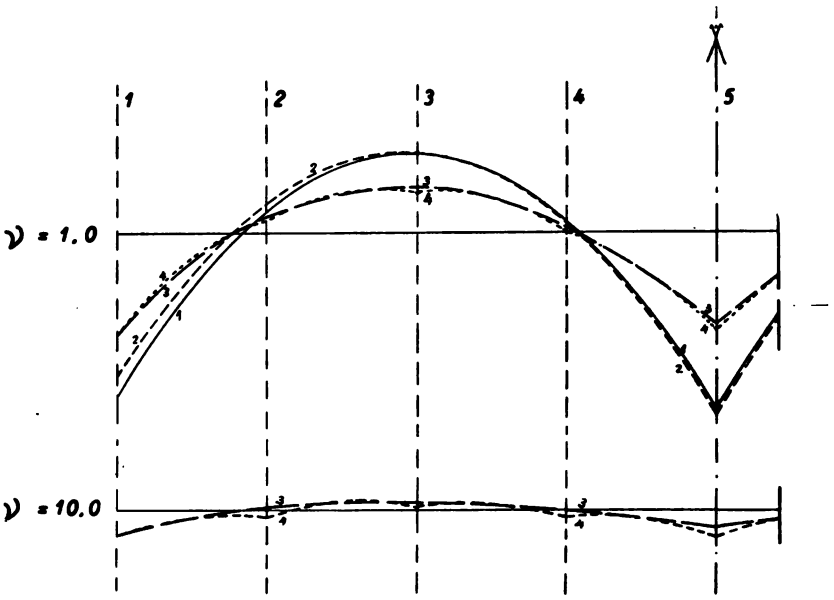
	Schnitt: η =	1 (Kämpfer)	$^3/_4$	$^1/_2$ (Viertel)	$^1/_4$	0 (Scheitel)
	Moment im unversteiften Bogen	+0,0403 *PL*	−0,0051 *PL*	−0,0198 *PL*	−0,0036 *PL*	+0,0435 *PL*
=1	Moment im Ersatzbogen	+0,0355	−0,0074	−0,0199	−0,0025	+0,0450
	Moment im verst. Bogen nach d. Näherungsmethode	+0,0254	−0,0043	−0,0108	−0,0013	+0,0225
	Moment im verst. Bogen nach der genauen Methode	+0,0250	−0,0029	−0,0097	−0,00004	+0,0239
=10	Moment im Ersatzbogen	+0,0320	−0,0085	−0,0195	−0,0012	+0,0465
	Moment im verst. Bogen nach d. Näherungsmethode	+0,0064	−0,0010	−0,0020	−0,0001	+0,0042
	Moment im verst. Bogen nach der genauen Methode	+0,0061	+0,0022	−0,0007	+0,0022	+0,0066

Obige Tabelle ist in Abb. 22 dargestellt. Man sieht, daß der hler der Näherungsmethode klein ist (Abweichungen der Kurven und 4). Der Unterschied zwischen den Momenten im unverteiften Bogen und im Ersatzbogen, der nur durch n bedingt ist, lt sich in bescheidenen Grenzen.

Einfluß der Laststellung

Wir haben bis jetzt nur den Fall einer Scheitelbelastung bendelt, und jetzt fragt es sich, ob der Balken mehr in Anspruch nommen wird, wenn sich die Last an einer anderen Stelle findet.

Wir wissen, daß das Zusammenwirken von Balken und Bogen ne Folge der Deformation des Bogens unter der Last ist. Die durch im Balken erzeugten Momente sind abhängig von der öße der Deformation des Bogens einerseits, sowie von der Lage r größten Deformation anderseits.



1 Moment im unversteiften Bogen.
2 Moment im Ersatzbogen.
3 Moment im versteiften Bogen nach der Näherungsmethode.
4 Moment im versteiften Bogen nach der genauen Methode.

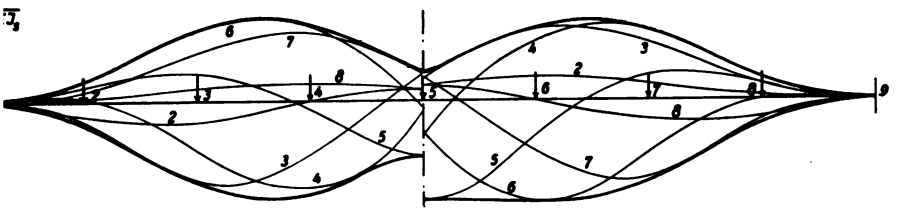
Abb. 22

In Tafel XIII haben wir die Biegungslinien verschiedener Bogen für mehrere Laststellungen von $P = 1$ gezeichnet. Die Umhüllungskurve gibt uns für jeden Bogen die Grenzen, in welchen sich die Deformationen jedes Punktes abspielen. Abb. 16 und 20 zeigen uns, wie der Balken durch die Einsenkungen der verschiedenen Stützen beeinflußt wird. Wir sehen, daß das maximale Moment sich stets an der Stelle der sich senkenden Stütze befindet. Dieses maximale Moment bleibt, bei gleich entfernten Stützen, fast konstant, nimmt ein wenig ab bei der vorletzten Stütze, wenn der Balken an den Enden frei aufgelagert ist, und nimmt zu, wenn er eingespannt ist. Somit dürfen wir annähernd sagen, daß der Balken für jede Stützensenkung gleich empfindlich ist.

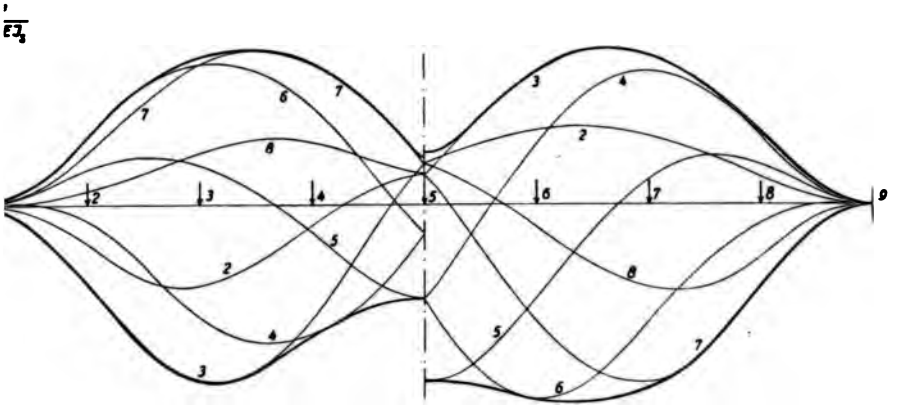
Tafel XIII.

Die Umhüllungskurven der Biegungslinien unter einer beweglichen Last P = 1.

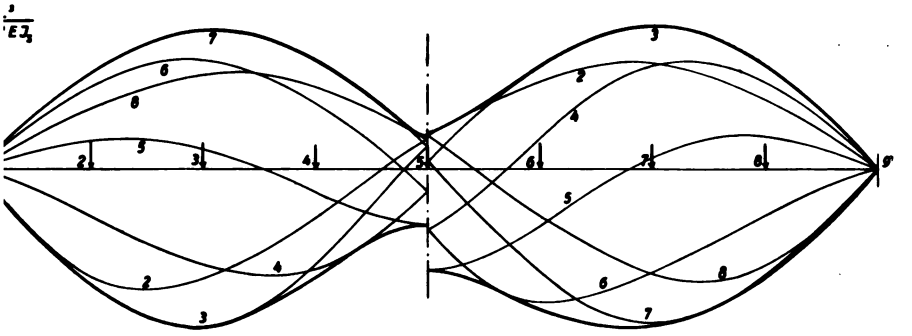
$c = 0$ $c = 0{,}4$



(voll eingespannter Bogen. $n = 0$)



(voll eingespannter Bogen $n = 1{,}0$)

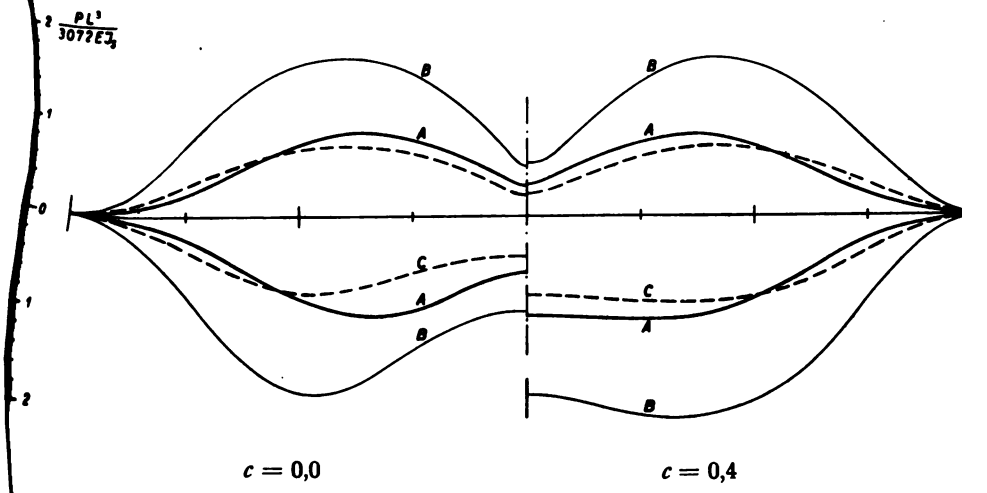


(Zweigelenkbogen. $n = 1{,}0$)

2 ist die Bingungslinie, wenn die Last sich im Punkt 2 befindet.

Tafel XIV.

Der Einfluss von [n] auf die Umhüllungskurven der Biegungslinien. (voll eingespannter Bogen)



$c = 0{,}0$ $c = 0{,}4$

——— Umhüllungskurve für den Bogen A mit $n = 0$ und J_s
——— „ „ „ „ B mit $n = 1$ und J_s
– – – „ „ „ „ C mit $n = 1$ und $J_s' = 2{,}3\, J_s$

Wir finden aus der Tafel XIII, daß sich der Scheitelpunkt, insbesondere, wenn c klein ist, gegenüber allen anderen Bogenpunkten (Kämpfergebiet ausgenommen) am wenigsten heben oder senken läßt. Der Punkt mit der größten Deformation liegt beim Zweigelenkbogen im Viertel und beim voll eingespannten Bogen zwischen $\eta = 0{,}33$ und $\eta = 0{,}43$, je nach den Werten von c und n.

Wie wir gesehen haben, befindet sich die maximale Stützenkraft unter der Last; und somit beeinflußt diese die Bogendeformation am meisten. Somit kann man sich davon überzeugen, daß die Viertelbelastungen den Balken mehr beeinflussen als alle anderen.

8. Einfluß des Faktors *n*

Der Einfluß des Faktors n ist nicht sehr klar. Selbstverständlich erfährt ein Bogen A mit kleinem n kleinere Durchbiegungen als ein Bogen B mit großem n. Das heißt: der Bogen A nimmt den Versteifungsbalken weniger in Anspruch als der Bogen B. Das gilt aber nur, wenn das Scheitelträgheitsmoment J_s beider Bogen gleich ist. Damit ist aber der Vergleich nicht einwandfrei. Deshalb wollen wir zunächst den Bogen A mit einem Bogen C vergleichen, der ein großes n hat, aber dessen J_s so groß ist, daß sein Volumeninhalt gleich demjenigen von Bogen A ist.

Wir vergleichen wie früher[17]) die folgenden drei Bogen:

Bogen A mit $n = 0$, J_s , und $c = 0{,}0$ bezw. $c = 0{,}4$
„ B „ $n = 1$, J_s , „ $c = 0{,}0$ „ $c = 0{,}4$
„ C „ $n = 1$, $J_s' = 2{,}3 J_s$[18]), „ $c = 0{,}0$ „ $c = 0{,}4$

Tafel XIV illustriert uns am besten den Vergleich. Man erkennt mit Hilfe der Umhüllungskurven, daß die Durchbiegungen des Bogens A in allen Punkten und für alle Werte von c durchwegs fast halb so groß sind wie diejenigen des Bogens B. Der Bogen C hingegen weist vorteilhaftere Durchbiegungen auf, ins-

---

[17]) Vergl. Seite 73.

[18]) Der Faktor 2,3 ist nicht konstant, variiert je nach dem Verhältnis f/L. Hier gilt sie für ein $f/L = 1/4$.

besondere bei kleinem c. Diese sind in mittleren Gebieten, wo der Versteifungsbalken im allgemeinen empfindlicher ist, kleiner als im Bogen A und größer in der Nähe der Kämpfer, wo der Balken in der Regel für die Einsenkungen weniger empfindlich ist und *wo die Einsenkungen selbst klein sind.*

Somit kann man für diesen mittleren Fall von $f/L = 1/4$ [18]) den Schluß ziehen, daß für den Versteifungsbalken sowie für die Steifigkeit des Bogens ein kleines n im allgemeinen nicht vorteilhaft ist.

9. Einfluß des Einspannungsgrades

Je kleiner der Einspannungsgrad eines Bogens ist, desto größer ist seine Durchbiegung, und desto größer ist somit die Inanspruchnahme des Versteifungsbalkens. Die Näherungsmethode bestätigt diese Tatsache anhand der Biegungsmomente.

10. Einfluß des Faktors c

Aus Tafel XIII sieht man, daß mit wachsendem c die Durchbiegungen des mittleren Bogenteils bedeutend größer werden. Folglich werden beide, Bogen und Balken, unter Belastungen im mittleren Gebiet, größere Beanspruchungen erleiden. Zwischen Kämpfer und Viertel hat c keinen großen Einfluß. Somit sollte für den Balken c klein gewählt werden.

Wie wir bei den freien Bogen gefunden haben, vergrößern sich mit c die Beanspruchungen bei Verkehrslast, bei Temperaturänderungen und Schwinden, sowie bei Widerlagerbewegungen. Man wählt $c \neq 0$, um einen günstigen Verlauf der Grenzwertlinien der Bogenmomente zu erhalten. Jedoch ist zu bemerken, daß es wirtschaftlicher ist, den Bogen, dank dem Horizontalschub, einen größeren Anteil der Momente zu übertragen als den Balken. Somit ist es nicht zu empfehlen, c groß zu wählen, um günstige Momente für den Bogen zu erhalten, wobei aber der Balken bedeutend verstärkt werden müßte.

C. Das Zusammenwirken bei Temperaturänderung

1. Bei den Brücken mit wenigen Stützen

a) Die Elastizitätsgleichungen nach der ersten Methode

Wir haben im ersten Teil den Einfluß von Temperaturänderung und Schwinden auf den freien Bogen behandelt. Wir wollen hier ergänzend ihre Wirkung im Fall des Vorhandenseins des Versteifungsbalkens studieren. Ein Teil des Schwindens im Bogen findet bei Zusammenwirken von Bogen und Balken statt. Dieser Teil soll bei der Spannungsbestimmung auch berücksichtigt werden.

Wir setzen voraus, daß im folgenden die Stützen *schlank* genug sind, um als Pendelstützen betrachtet werden zu können. Und zwar, weil die horizontalen Verschiebungen der Stützenköpfe infolge der Balkenausdehnung hier beträchtlich sind. Für den Fall, daß die Stützen nicht genügend schlank sind, treten zusätzliche Momente auf, die von Fall zu Fall ermittelt werden müssen.

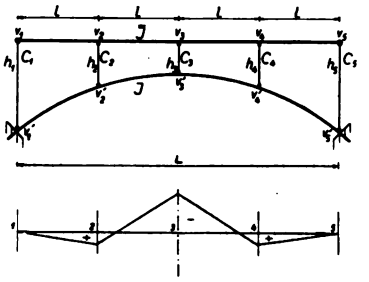


Abb. 23

Wir betrachten im folgenden den Bogen in Abb. 23. Bei einer Temperaturzunahme hebt sich der Bogen, und da dies nicht in allen Punkten gleichmäßig geschieht, verbiegt sich der Balken. Durch den Widerstand des Balkens entstehen in den Stützen beim Scheitel Druckkräfte und in den anderen Stützen Zugkräfte. Der Horizontalschub wird voraussichtlich größer sein.

Wir werden zunächst das Problem nach der ersten Methode behandeln. Temperaturzunahme, Einsenkungen und Druckkräfte sollen positiv, Hebungen, Zugkräfte, Temperaturabnahme sowie Schwinden negativ sein. Nach dem Gesetz der Superposition schreiben wir die Elastizitätsgleichungen allgemein wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= v_{10}' + C_1 v_{11}' + C_2 v_{12}' + C_3 v_{13}' + \dots \\ v_2' &= v_{20}' + C_1 v_{21}' + C_2 v_{22}' + C_3 v_{23}' + \dots \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

usw.

Darin bedeuten v_{10}', v_{20}' usw. die vertikalen Verschiebungen der Bogenpunkte 1', 2' usw. infolge Temperaturänderung, wenn der Balken nicht vorhanden wäre [19]).

Die Stützen erfahren Verlängerungen aus dem Temperaturzuwachs und Verkürzungen infolge der Druckkräfte. Somit erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_1' + \zeta_1 h_1 C_1 - \omega t^\circ h_1 \\ v_2 &= v_2' + \zeta_2 h_2 C_2 - \omega t^\circ h_2 \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

usw.

Damit ergeben sich für den Balken folgende Ausdrücke für die Auflagerkräfte:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= v_1 C_{11} + v_2 C_{12} + v_3 C_{13} + \dots \\ C_2 &= v_1 C_{21} + v_2 C_{22} + v_3 C_{23} + \dots \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

usw.

Aus diesen drei Gleichungsgruppen lassen sich die Auflagerdrücke ausrechnen. Die Symmetrie vereinfacht uns die Arbeit, indem wir nur die Hälfte der Auflagerdrücke ausrechnen müssen. Aus diesen Auflagerdrücken können wir die Momente im Balken bestimmen sowie die zusätzlichen Momente im Bogen ausrechnen, die man zu den Temperaturmomenten für den unversteiften Bogen addiert.

Ein Zahlenbeispiel.

Zur Illustrierung behandeln wir folgenden Fall:

Eingespannter Bogen, $n = 0$, $c = 0$, $J_s = 0{,}039$ m^4, $L = 40{,}0$ m, $f = 13{,}2$ m. Balken an den Enden frei aufgelagert mit 4

[19]) Beachte die Fußnote der Tafel XI, Seite 61.

Öffnungen. $\bar{J} = 0{,}156\ \text{m}^4$, $l = 10{,}0$ m. Die Pendelstützen haben $F = 0{,}40\ \text{m}^2$ und die Höhen $h_1 = 15{,}0$, $h_2 = 5{,}1$, $h_3 = 1{,}8$ m. (Vergl. Abb. 23.)

$$E = 2 \cdot 10^6\ \text{t/m}^2 \qquad t^\circ = +\,20\,^\circ C \qquad \omega = 10^{-5}$$

Aus Tafel XI bekommen wir:

$$v'_{20} = v'_{40} = -\,0{,}460\,\frac{\omega t^\circ L^2}{4f}, \quad v'_{30} = -1{,}096\,\frac{\omega t^\circ L^2}{4f} \text{ (gezwungene Verschiebung)}$$

$$v'_{20} = v'_{40} = -\,9{,}9\ \omega t^\circ\ , \quad v'_{30} = -\,13{,}2\ \omega t^\circ \text{ (freie Verschiebung)}$$

und aus Tafel VII ergibt sich:

$$v'_{22} = 0{,}871\ T \qquad v'_{24} = -\,0{,}531\ T$$
$$v'_{33} = 0{,}600\ T \qquad v'_{23} = -\,0{,}278\ T$$

Setzen wir diese Werte zusammen mit denen von C_{11}, C_{12} etc. (Seite 100, 101) in den Gleichungen (128) bis (130) ein, so erhalten wir für die Auflagerdrücke des Balkens:

$$C_1 = C_5 = \ \ 0{,}034\ \text{t}$$
$$C_2 = C_4 = -\,2{,}223\ \text{t}$$
$$C_3 \ \ \ = \ \ 4{,}378\ \text{t}$$

Zur Kontrolle: $\Sigma C = 0$.

Die Balkenmomente lassen sich daraus sehr einfach berechnen:

$$\bar{M}_2 = \ \ 0{,}34\ \text{m}\cdot\text{t}$$
$$\bar{M}_3 = -\,21{,}55\ \text{m}\cdot\text{t} \quad \text{(Abb. 23)}$$

Die Momente im Bogen können wir nach dem Superpositionsgesetz allgemein wie folgt ausrechnen:

$$M = M_0 + C_1 M_1 + C_2 M_2 + C_3 M_3 + \ldots \qquad (131)$$

worin M_0 das Moment des unversteiften Bogens infolge Temperaturänderung ist. Die Gleichung (91) gibt uns

$$M_0 = -\,H_t \cdot y\,, \qquad \text{worin} \qquad H_t = \lambda\,\frac{\omega t^\circ E J_s}{f^2} = 2{,}94\ \text{t}$$

Daraus folgt:

$$M_{10} = \ \ 31{,}02\ \text{m}\cdot\text{t}$$
$$M_{20} = \ \ \ 1{,}94\ \text{m}\cdot\text{t}$$
$$M_{30} = -\ 7{,}76\ \text{m}\cdot\text{t}$$

Infolge des Auflagerdruckes C_2 bekommen wir im Bogen aus Tafel VI folgende Momente:

$$C_2 \cdot M_{12} = + 8{,}22 \text{ m·t}$$
$$C_2 \cdot M_{22} = - 4{,}03 \text{ m·t}$$
$$C_2 \cdot M_{32} = + 0{,}84 \text{ m·t}$$
$$C_2 \cdot M_{42} = + 0{,}58 \text{ m·t}$$
$$C_2 \cdot M_{52} = - 4{,}82 \text{ m·t}$$

Infolge C_3 folgt analog:

$$C_3 \cdot M_{13} = C_3 \cdot M_{53} = + 10{,}94 \text{ m·t}$$
$$C_3 \cdot M_{23} = C_3 \cdot M_{43} = - 3{,}06 \text{ m·t}$$
$$C_3 \cdot M_{33} = + 6{,}84 \text{ m·t}$$

Nach der Gleichung (131) bekommen wir:

$$M_1 = M_{10} + C_2 M_{12} + C_3 M_{13} + C_4 M_{14}$$
$$= 31{,}02 + 8{,}22 + 10{,}94 - 4{,}82 = \underline{45{,}36 \text{ m·t}}$$

Analog wird:

$$M_2 = \underline{- 4{,}57 \text{ m·t}}$$
$$M_3 = \underline{0{,}76 \text{ m·t}}$$

Der Horizontalschub läßt sich wie folgt berechnen:

$$H = H_0 + C_2 H_2 + C_3 H_3 + C_4 H_4 \qquad (132)$$

Die Faktoren H_2, H_3, H_4 erhalten wir aus der Einflußlinie von H (Tafel XI). Somit wird

$$H = 5{,}03 \text{ t}$$

In der folgenden Tabelle vergleichen wir die Temperaturwirkung am Bogen.

Temp. Zunahme 20° C	Ohne Aufbau	Mit Aufbau
$H =$	2,94 t	5,03 t
Im Kämpfer: $M_1 =$	31,02 mt	45,36 mt
Im Viertel: $M_2 =$	1,94	- 4,57
Im Scheitel: $M_3 =$	-7,76	0,76

Daraus ersehen wir, daß H sowie die Momente (außerhalb des Scheitelgebietes) mit der Versteifung zunehmen. Die Entlastung

des Scheitels beruht darauf, daß die Druckkraft C_3 im Scheitel ein positives Moment erzeugt, welches das negative Moment im Scheitel des unversteiften Bogens infolge H_t vermindert oder aufhebt.

b) Die Elastizitätsgleichungen nach der neuen Methode

Diese führt hier leicht zum Ziel, auch wenn die Anzahl der Öffnungen groß ist. Ferner geht die Iteration infolge der Symmetrie rascher vor sich; somit genügen eine oder höchstens zwei Wiederholungen der Berechnung. Nur die Gleichungen (125) erfahren eine Abänderung:

$$\begin{aligned} v_1 &= && - \omega t^\circ h_1 \\ v_2 &= v'_{20} + M_1 v'_{21} + M_2 v'_{22} + \ldots && - \omega t^\circ h_2 \\ v_3 &= v'_{30} + M_1 v'_{31} + M_2 v'_{32} + \ldots && - \omega t^\circ h_3 \\ &\text{usw.} \end{aligned} \qquad (133)$$

worin v'_{20}, v'_{30} die im unversteiften Bogen infolge Temperaturänderung eintretenden vertikalen Verschiebungen bedeuten. Sie sind identisch mit denjenigen von Gleichung (128).

2. Bei den Brücken mit vielen Stützen

a) Einleitung

Wir werden untersuchen, ob wir die Näherungsmethode anwenden können, da sie unvergleichlich einfacher ist. Wir gehen hier wieder von denselben 3 Annahmen aus. Die Annahme, daß die Stützen starr sind, *gilt hier nicht für ihre Ausdehnung infolge der Temperaturänderung,* denn diese Ausdehnung ist außerordentlich groß im Verhältnis zu derjenigen infolge der Axialkräfte.

b) Das Grundsystem und die Momentengleichungen im Bogen und im Balken

Wir schalten am Bogen rechts ein Gelenklager und links ein Rollenlager ein. Das entstehende Grundsystem läßt sich bei Temperaturerhöhung spannungsfrei ausdehnen[20]). Ein Horizontal-

[20]) Dabei sei angenommen, daß der Balken sich vollständig über dem Bogen durch Pfosten stützt.

schub an den Enden starrer Scheiben (von bestimmter Höhe t) zwingt den Bogen, seine Auflagerbedingungen zu erfüllen.

Da wir eine gleichmäßige Temperaturänderung annehmen, ergibt sich im Grundsystem keine Stabverbiegung. Ausschließlich erfolgen Axialausdehnungen, und die Spannweite vergrößert sich um den Betrag $\Delta L = \omega t^0 L$. Somit können uns die Gleichungen (90) und (91) — bezogen auf den Ersatzbogen — den Horizontalschub liefern. Es wird somit:

$$H_t = \omega t^\circ \frac{EJ_s^*}{f^2} \lambda_\mu^* \tag{134}$$

$$M^* = -H_t \cdot y = -\omega t^\circ \frac{EJ_s^*}{f} \lambda_\mu^* (c_0'^* - c' \eta^2 - c \eta^4) \tag{135}$$

Dieses Moment verteilt sich wie früher nach der Gleichung (122) auf den Bogen und den Balken. Aus der Gleichung (134) ist es gut ersichtlich, daß der Horizontalschub mit der Bogenversteifung größer wird (J_s^* statt J_s). Dagegen wird das Bogenmoment nicht wesentlich geändert dadurch, daß der Balken einen Teil von M^* übernimmt.

c) Formeln für die Momente im Bogen und im Balken, in den Schnitten beim Scheitel, Viertel und Kämpfer

Es ist zweckmäßig, daß man sich anhand einfacher Formeln noch rasch ein Bild von den Temperaturmomenten im Bogen sowie im Balken macht. Aus den Gleichungen (135) und (122) ergibt sich für den Balken, der den gleichen Einspannungsgrad wie der Bogen hat:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{M}_{Scheitel} &= -\frac{\nu}{1+\nu} \omega t^\circ \cdot \frac{EJ_s^*}{f} \cdot \lambda_\mu^* \cdot c_0'^* \\
\bar{M}_{Viertel} &= -\frac{d}{1+d} \omega t^\circ \cdot \frac{EJ_s^*}{f} \cdot \lambda_\mu^* \left(c_0'^* - \frac{c'}{4} - \frac{c}{16}\right) \\
\bar{M}_{Kämpfer} &= \frac{n\nu}{1+n\nu} \omega t^\circ \cdot \frac{EJ_s^*}{f} \cdot \lambda_\mu^* \cdot c_0^*
\end{aligned}\right\} \tag{136}$$

Für den Bogen erhalten wir:

$$M_S = \frac{1}{\nu}\bar{M}_S, \quad M_V = \frac{1}{d}\bar{M}_V, \quad \bar{M}_K = \frac{1}{n\nu}\bar{M}_K \qquad (137)$$

Dabei sei $\nu = \frac{\bar{J}}{J_s}$ und $d = \frac{\bar{J}}{J}$.

d) Zahlenbeispiel

Zur Illustrierung behandeln wir das Beispiel 5 Seite 107. Es ist ein eingespannter Bogen mit $c = 0$, $n = 0{,}4$, der mit einem eingespannten Balken versteift ist. Wir haben aus Seite 112

$\nu = 0$ (Bogen unversteift)	$\nu = 1$	$\nu = 10$
$n = 0{,}4$	$n^* = 0{,}643$	$n^* = 0{,}921$
$\lambda = 17{,}42$	$\lambda^* = 14{,}04$	$\lambda^* = 11{,}73$
$c_0' = 0{,}267$	$c_0'^* = 0{,}297$	$c_0'^* = 0{,}326$
$J_s = 1 \cdot J_s$	$J_s^* = 2 \cdot J_s$	$J_s^* = 11 \cdot J_s$

Aus den Gleichungen (134) und (135) wird:

$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 10$
$H_t = 17{,}42\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f^2}$	$H_t = 28{,}08\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f^2}$	$H_t = 129{,}03\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f^2}$
Am Scheitel:		
	$M_S^* = -8{,}34\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f}$	$M_S^* = -42{,}06\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f}$
$M_S = -4{,}64\ \omega t^\circ \frac{EJ_s}{f}$	$M_S = -4{,}17$ „	$M_S = -3{,}82$ „
	$\bar{M}_S = -4{,}17$ „	$\bar{M}_S = -38{,}24$ „
Am Kämpfer:		
	$M_K^* = 19{,}74$ „	$M_K^* = 86{,}97$ „
$M_K = 12{,}78$ „	$M_K = 12{,}01$ „	$M_K = 8{,}52$ „
	$\bar{M}_K = 7{,}73$ „	$\bar{M}_K = 78{,}45$ „

Daraus ersehen wir, daß die Bogenmomente mit der Versteifung abnehmen, dabei muß der versteifende Träger erhebliche Momente ertragen.

D. Das Zusammenwirken bei horizontaler Verschiebung der Widerlager

Eine kleine horizontale Verschiebung der Widerlager eines Bogens [21]) infolge Nachgiebigkeit der Fundamente oder Bergbewegung kommt vor. Wir haben früher gefunden, daß die Wirkung der horizontalen Verschiebungen der Widerlager auf einen unversteiften Bogen dieselbe ist wie diejenige einer Temperaturänderung. Wenn wir in den Gleichungen von H und M für Temperaturänderung $\omega t°$ durch $\frac{e}{L}$ [22]) ersetzen, bekommen wir unmittelbar die Gleichungen für H und M infolge der Widerlagerverschiebung [23]). Das gilt auch für den versteiften Bogen.

Von der gleichen Annahme ausgehend, daß die Stützen genügend schlank sind, gelten hier die Gleichungen (128) bis (137) des letzten Abschnittes, unter Beachtung, daß man überall $\omega t°$ durch $\frac{e}{L}$ ersetzt und die Glieder infolge der Stützenausdehnung infolge Temperaturwirkung ausschaltet. Dabei bedeuten hier die in den Gleichungen (128) und (133) enthaltenen v'_{10}, v'_{20} usw. die Senkungen der Bogenpunkte 1′, 2′ usw. infolge der Widerlagerverschiebung, wenn der Balken nicht vorhanden wäre.

Bei $e = \omega t° L$ erhält das gesamte Gebilde denselben Spannungszustand, wie wenn die Temperatur sich um $t°$ erhöht hätte.

E. Zusammenfassung

Aus unserer Untersuchung des Zusammenwirkens von Bogen und Aufbau können wir folgende Schlüsse ziehen:

1. Für die Brücken mit obenliegender Fahrbahn darf man die Stützen als starr annehmen; der Fehler ist stets kleiner als 2 %. Bei den Brücken mit untenliegender Fahrbahn beträgt

---

[21]) Voll eingespannt oder zweigelenkig.

[22]) e ist negativ bei Ausdehnung der Spannweite.

[23]) Vergl. Seite 69.

der Fehler ca. 10 % bei kleinem ν und nimmt bei großem ν bis ca. 5 % ab. Dadurch wird der Balken etwas unterdimensioniert, jedoch kann der Fehler bei großem ν vernachlässigt werden.

2. Die Untersuchung hat gezeigt, daß schon bei 8 Öffnungen die Näherungsmethode mit großer Genauigkeit zum Ziele führt. Bedingung ist aber, daß die Einspannungsverhältnisse des Bogens und des Balkens nicht stark verschieden sind.
3. Der Balken ist im allgemeinen am meisten beansprucht, wenn sich die Last über dem Bogenviertel befindet; Scheitelbelastungen nehmen den Balken weniger in Anspruch.
4. Je stärker der Bogen eingespannt ist, desto kleiner sind die Balkenbeanspruchungen.
5. Der Faktor c soll zu Gunsten des Balkens möglichst klein gehalten werden.
6. Von zwei Bogen mit dem gleichen Betonvolumen und mit der gleichen Breite ist derjenige mit größerem n für den Balken vorteilhafter.
7. Die Temperaturspannungen in einem versteiften Bogen sind verschieden von denjenigen in einem unversteiften, noch entstehen im Versteifungsbalken erhebliche Momente. Daher darf man bei der Berechnung von gewölbten Brücken das Zusammenwirken bei Temperaturänderung und Schwinden nicht vernachlässigen.
8. Hohe Spannungen im Versteifungsbalken werden durch eventuelle horizontale Verschiebungen der Bogenwiderlager entstehen. Diese Tatsache muß beim Entwerfen gut beachtet werden.

Es ist zu erwähnen, daß wir bei allen Methoden die waagrechten Komponenten der Verschiebungen der Bogenknotenpunkte vernachlässigt haben; dadurch wurde der Einfluß der Stützenverbiegungen auf das ganze System nicht berücksichtigt. Deshalb können uns die besprochenen Methoden nur dann ein exaktes Bild der Momente, der Einflußlinien und der Deformationen geben,

wenn die Stützen einen genügenden Schlankheitsgrad besitzen. Bei den Brücken mit untenliegender Fahrbahn ist das gewöhnlich der Fall; und die angegebenen Methoden sind für diese Brücken sehr geeignet.

Hat eine Brücke mit obenliegender Fahrbahn zu steife Stützen, und will man deshalb die erwähnten waagrechten Verschiebungen in die Berechnung einbeziehen, so stößt man auf sehr komplizierte und sehr zeitraubende analytische Berechnungen. Die Bestimmung der Einflußlinien als Biegungslinien nach Modellversuchen — Methode von Beggs — ist in solchen Fällen als Kontrolle unerläßlich.

Im übrigen muß man den Einspannungsgrad des Bogens sowie die anderen Widerlagerverhältnisse sorgfältig berücksichtigen.

Noch bleibt eins zu erwähnen. Die hier berechneten Beispiele bezogen sich nur auf eine Einzellast über einer Stütze. Man könnte nun der Meinung sein, daß für die Bestimmung der Einflußlinien einer symmetrischen Brücke mit $2r$ Stützen r-mal soviel Arbeit notwendig wäre und dadurch das Problem des Zusammenwirkens zeitraubend geblieben wäre. Es ist aber zu bemerken, daß bei jedem Beispiel, je nach der angewendeten Methode, gewisse vorbereitende Rechnungen durchzuführen waren, die für jede Brücke nur einmal notwendig sind. Somit sind für die Bestimmung der Einflußlinien der Brücke mit $2r$ Stützen, neben der einmaligen Vorbereitungsarbeit, nur r Gleichungssysteme aufzustellen. Diese Arbeiten werden durch die Formeln und die Tafeln im ersten Teil stark erleichtert[24]). Für die Berechnung des Zusammenwirkens selbst stehen uns 4 Methoden zur Verfügung. Jede ist in ihrem Verwendungsbereich sehr wertvoll. Somit ist die Berechnung des Zusammenwirkens für die praktische Benützung weitgehend vereinfacht.

---

[24]) Diese Vorbereitungsarbeiten müßten auf alle Fälle bei der Berechnung des freien Bogens und der Probebelastungen durchgeführt werden.